Trường ĐHCN TP. HCM **Bài tập A2-C2 số 01**

Khoa KHCB **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Trình bày phép nhân ma trận và một số tính chất quan trọng của phép nhân hai ma trận. Cho ví dụ minh họa các tính chất đó.

Câu 2. Tính AB, cho biết

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Câu 3. Cho A là ma trận vuông cấp 2000, trong đó phần tử ở dòng i cột j là $(-1)^{i+j}$. Tìm phần tử ở dòng 1 cột 2 của ma trận A^2.

Trường ĐHCN TP. HCM **Bài tập A2-C2 số 02**
Khoa KHCB **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Trình bày các tính chất định thức, cho ví dụ minh họa.

Câu 2. Tính các định thức

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Câu 3. Tính theo m định thức của các ma trận sau:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 5 & m+1 \\ 3 & 7 & m+2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} -1-m & -3 & -3 \\ 3 & 6-m & 3 \\ -1 & -1 & 1-m \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 6-m & 3 & 2 \\ -5 & -2-m & -2 \\ -3 & -2 & -m \end{pmatrix}$

Câu 4. Cho$A$ là ma trận vuông cấp n.

a. Biết $|A| = 2$ và $A - A^{-1} = I$, tính $|A - I|$.

b. Cho A khả nghịch, tính định thức của ma trận $\left(A^{-1}A^T A\right)^{-1}$.

Trường ĐHCN TP. HCM | **Bài tập A2-C2 số 03**
Khoa KHCB | **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Tính nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Câu 2. Biện luận theo m hạng của ma trận

a. $A = \begin{pmatrix} m+2 & 3 & 2 \\ 1 & m & 1 \\ m+2 & 2m+1 & m+2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 & 4 \\ m & m & m+2 & 6 \\ 2m & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

Câu 3. Biện luận theo m số nghiệm của các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} mx + (m+2)y = m+1 \\ (m+2)x - y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} mx + (6m-9)y = 2m^2+3m+2 \\ x + my = m^3+1 \end{cases}$

Câu 4. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

a. $\begin{cases} mx - y = 2m^2+m+1 \\ (m-2)x + y = m \end{cases}$

b. $\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ (m+1)x + 3y = 1 \end{cases}$

Trường ĐHCN TP. HCM | **Bài tập A2-C2 số 04**
Khoa KHCB | **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} x + 4y + 5z = 3 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 6y + 3z = 2 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$

Câu 2. Giải các hệ phương trình thuần nhất

a. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

Câu 3. Tìm m, n để hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + x + 2t = m \\ 2x - 3y - 2t - 5t = 0 \end{cases}$$

và hệ phương trình

$$\begin{cases} -8x + 13y + 12z + 29t = -1 \\ 5x - 9y - 11z - 26t = n \end{cases}$$

có nghiệm chung.

Câu 4. Cho phương trình ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ -17 & -1 & 8 & 6 & 1 \\ 12 & 1 & -6 & -4 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Tìm điều kiện a, b, c để phương trình có nghiệm.

Trường ĐHCN TP. HCM | **Bài tập A2-C2 số 05**
Khoa KHCB | **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Xác định m để vectơ $(2, m+4, m+6)$ là một tổ hợp tuyến tính của
$$u = (1,2,3), v = (3,8,11), w = (1,3,4)$$

Câu 2. Xác định m để vectơ $(1, m+2, m+4)$ không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ các vector
$$u = (1,2,3)\,, v = (3,7,10)\,, w = (2,4,6)$$

Câu 3. Xác định m để 3 vector sau đây độc lập tuyến tính:
$$u = (m+2,3,2)\,, v = (1,m,1)\,, w = (m+2,2m+1,m+2)$$

Câu 4. Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:
$$u = (m+1,1,m+1)\,, v = (1,1,1)\,, w = (2,0,m+2)$$

Câu 5. Định m để hệ sau có hạng bằng 3:
$$u = (m,1,0,2)\,, v = (m,m+2,0,2)\,, w = (2m,m+3,1,4)$$

Câu 6. Tìm số chiều $n = \dim W$ của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ gồm các vectơ sau
$$u_1 = (1,2,3,4)\,, u_2 = (2,0,6,0)\,, u_3 = (6,6,7,0)\,, u_4 = (8,0,0,0)$$

Trường ĐHCN TP. HCM | **Bài tập A2-C2 số 06**
Khoa KHCB | **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Chỉ ra số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 5y + 7z = 0 \\ 2x + 10y + 14z = 0 \\ -x - 5y - 7z = 0 \end{cases}$

Câu 2. Tìm số chiều $n = \dim W$ của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ sau

$$u_1 = (2,2,3,4)\,, u_2 = (4,4,6,8)\,, u_3 = (6,6,9,12)\,, u_4 = (8,8,12,16)$$

Câu 3. Trong $\mathbb{R}^4$ cho

$$W = \{(-1;1;1;0),(0;-2;-1;1),(-2,8,-1,-3)\}$$

Tìm điều kiện để $u = (a,b,c,d) \in \langle W \rangle$

Câu 4. Chứng minh $11x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$ có không gian nghiệm sinh bởi hệ 3 vector

$$a_1 = (-1,-7,13), a_2 = (2,2,-10), a_3 = (3,-3,-7)$$

Trường ĐHCN TP. HCM **Bài tập A2-C2 số 07**
Khoa KHCB **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Cho E_n là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, $u = (u_1; \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ và $B = \{b_1; \ldots, b_n\}$ là một sơ sở của $\mathbb{R}^n$.

a. Tìm $[u]_{E_n}$.

b. Tìm $\mathrm{P}_{E_n \to B}$

Câu 2. Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở $U = \{u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (2, 1, 0), u_3 = (1, 3, 2)\}$

a. Tìm tọa độ của vectơ $u = (2, -1, 1)$ theo cơ sở

b. Tìm tọa độ của vectơ $u = (m, 2m, 3m)$ theo cơ sở

c. Ma trận $P_{U \to U}$

Câu 3. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ: $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (2, -1, 3)$, $u_3 = (3, 1, 1)$, $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 2)$. Tìm ma trận trận chuyển cơ sở $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ sang cơ sở $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ của $\mathbb{R}^3$

Câu 4. Trực chuẩn hóa các cơ sở sau

a. $x_1 = (1; 0; -1), x_2 = (1; -1; 0), x_3 = (1; 1; 1)$

b. $x_1 = (-1; 1; 0), x_2 = (1; 1; 1), x_3 = (-1; 0; 1)$

Trường ĐHCN TP. HCM | **Bài tập A2-C2 số 08**
Khoa KHCB | **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$$

Tìm hạng, số khuyết của f.

Câu 2. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f\,(x, y, z) = \left(x + 2y + mz;\; mx;\; x + 2y + m^2 z\right)$$

a. Tìm m để f có hạng bằng 2.

b. Tìm m để f có số khuyết bằng 2.

Câu 3. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, -x + z)$$

và hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1; -1; 2),\ (2; 1; 0),\ (1; 2; 1)\} \quad C = \{(1; 1; 0),\ (0; 1; 1),\ (1; 0; 1)\}$$

a. Tìm $[f]_E^B$, $[f]_B^E$

b. Tìm $[f]_E^E$, $[f]_B^C$

c. Cho $([u]_B)^T = (2; 1; 3)$, tìm $[f(u)]_C$

Trường ĐHCN TP. HCM **Bài tập A2-C2 số 09**
Khoa KHCB **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, biết ma trận của f đối với cơ sở

$$F = \{(1; 1; -1),\ (-1; 1; 1),\ (1; -1; 1)\} \text{ là } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Tìm $[f]_E^E$ và suy ra biểu thức của f

b. Tìm $[f^{-1}]_E^E$ và suy ra biểu thức của f^{-1}

Câu 2. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, trong đó

$$f(2; 3) = (-2; 1; 3);\ f(-1; 4) = (2; 2; -1).$$

Cho $C = \{(1, 2, -2), (-1, 2, 1), (1, -1, 1)\}$. Đặt $B = \{(2; 3), (-1; 4)\}$

a. Tìm $[f]_B^E$, $[f]_B^C$

b. Cho $[d]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tìm $[f(d)]_{E_3}$.

c. Tìm $[f]_E^E$, và suy ra biểu thức f.

Câu 3. Cho $B, B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và ánh xạ tuyến tính

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ có } [f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ m & 3 \end{pmatrix}$$

Cho $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tìm $f(u)$.

Trường ĐHCN TP. HCM | **Bài tập A2-C2 số 10**
Khoa KHCB | **GV: Nguyễn Đức Phương**

Câu 1. Cho A có đa thức đặc trưng $P = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2$. Tìm biểu thức$A^{-1}$ theo A .

Câu 2. Tìm giá trị của m để $u = (m, 0, m-1)$ là vector riêng của phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y,\ y + z,\ z).$$

Câu 3. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (2x,\ y + 4z,\ 2y - z).$$

Tìm các không gian con riêng ứng với các trị riêng

Câu 4. Chéo hóa (nếu được) các ma trận sau:

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ d. $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Câu 5. Chính tắc hóa các dạng toàn phương:

a. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

b. $f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 + 8x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

c. $f(x_1, x_2, x_3) = -9x_1^2 - 9x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$