ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Ths. Ngô Quốc Nhàn

BÀI GIẢNG
PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Hệ Đại Học
Ngành:
Thời lượng giảng dạy: 30 tiết.

TP.HỒ CHÍ MINH-2016

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

Chương 1

SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1 Khái niệm sai số

Độ lệch giữa giá trị gần đúng và giá trị đúng được gọi là sai số.

1.1 Các loại sai số

i) Sai số giả thiết : các giả thiết dùng để mô hình hóa bài toán thường thiếu chính xác, được chấp nhận khi xây dựng mô hình.

ii) Sai số số liệu ban đầu: Các hằng số vật lý, đo lường.

iii) Sai số phương pháp: phương pháp giải xấp xỉ để sai số $\leq \varepsilon$ (giới hạn yêu cầu), mỗi phương pháp thông thường có một sai số nhất định.

iv) Sai số tính toán: chủ yếu do làm tròn số trong tính toán hoặc chỉ sử dụng một số hữu hạn các chữ số, các sai số này tích lũy trong quá trình giải toán.

2 Sai số tuyệt đối, sai số tương đối

2.1 Sai số tuyệt đối

A giá trị chính xác; a giá trị gần đúng. Viết: $A \approx a$.
Sai số tuyệt đối:
Trong thực tế ta không biết được số đúng A, do đó nói chung sai số tuyệt đối không tính được. Vì vậy ta tìm cách ước lượng sai số tuyệt đối của a bằng số $\Delta a > 0$ sao cho

$$|A - a| \leq \Delta a$$

Số dương Δa được gọi là sai số tuyệt đối giới hạn của a. Ký hiệu:

$$A = a \pm \Delta a$$

2.2 Sai số tương đối

Đại lượng $\delta = \frac{\Delta a}{|A|}$ được gọi là sai số tương đối của a.
Tuy nhiên một lần nữa ta thấy rằng A thường không biết, vì vậy người ta định nghĩa đại lượng $\delta_a = \frac{\Delta a}{|a|}$ là sai số tương đối giới hạn của a. Đôi khi người ta biểu diễn sai số tương đối dưới dạng %.

3 Công thức tổng quát của sai số

Cho hàm số $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, mỗi biến x_i có sai số Δx_i. Khi đó:
Sai số tuyệt đối:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Sai số tương đối:

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{|y|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial (\ln f)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Thí dụ 1.1. *Cho*

$$A = 0.50 \pm 0.05; B = 1.50 \pm 0.07; C = 2.500 \pm 0.001$$

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của các hàm số sau:

i) $f(a, b) = 2a + 3b$;

ii) $f(a, b, c) = 2a^2 + 3bc^2 - 5c^3$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4 Biểu diễn số thập phân

Số thập phân được viết dưới dạng:

$$a = a_k a_{k-1} ... a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} ... a_{-l} = \sum_{j=-l}^{k} a_j \times 10^j, a_j \in \{0, 1, ..., 9\}$$

Thí dụ 1.2. $12345 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
$1210,1983 = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-4}$

4.1 Làm tròn số

Làm tròn số là bỏ một số chữ số lẻ bên phải để được số ngắn gọn hơn, gần đúng với a.
Để làm tròn số thập phân a thành a' đến chữ số thứ j sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $j+1$ là a_{j+1}.
Nếu $a_{j+1} \geq 5$ ta tăng a_j lên một đơn vị.
Nếu $a_{j+1} < 5$, ta giữ nguyên a_j.
Sai số làm tròn:

$$\theta a = |a - a'|$$

Thí dụ 1.3.

$$12,0352 \approx 12,035$$
$$12,0352 \approx 12,04$$

4.2 Chữ số có nghĩa

Trong cách viết thập phân của số a, chữ số có nghĩa là tất cả các chữ số bắt đầu từ một chữ số khác không tính từ trái sang.

4.3 Chữ số đáng tin

Cho

$$A \approx a$$

với sai số Δa.
Chữ số a_j được gọi là chữ số đáng tin nếu

$$\Delta a \leq \frac{10^j}{2} \text{ hay } j \geq \log(2\Delta a)$$

.

Thí dụ 1.4. *Tìm chữ số đáng tin của các số sau:*

i) $a = 123.4567$ *với sai số* $\Delta a = 0.053$*;*

ii) $a = 123.4567$ *với sai số* $\Delta a = 0.0025$.

....
....
....
....
....
....
....
....

Chương 2

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

1 Tìm nghiệm thực của một phương trình

1.1 Nghiệm thực của một phương trình-Ý nghĩa hình học

Cho phương trình

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

trong đó $f(x)$ là hàm cho trước của đối số x.

α là nghiệm của (2.1) khi và chỉ khi $f(\alpha) = 0$.

Định lý 2.1. *Nếu có hai số thực a, b (a < b) sao cho f(a) và f(b) trái dấu, tức $f(a).f(b) < 0$ đồng thời f(x) liên tục trên [a, b] thì trong khoảng [a, b] ít nhất có một nghiệm thực của phương trình f(x) = 0.*

Định nghĩa 2.1. *Khoảng [a, b] gọi là khoảng phân ly nghiệm của phương trình f(x) = 0 nếu nó chứa một và chỉ một nghiệm của phương trình đó*

Định lý 2.2. *Nếu hàm số f(x) liên tục và đơn điệu trên khoảng [a, b], đồng thời f(a) và f(b) trái dấu thì [a, b] là khoảng phân ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.*

2 Phương pháp giải

2.1 Phương pháp chia đôi

Giả sử $[a, b]$ là khoảng phân ly nghiệm của phương trình.
Chia đôi khoảng $[a, b]$ bởi $c = \frac{a+b}{2}$; nếu $f(c) = 0$ thì ta có nghiệm chính xác $x = c$, trong trường hợp $f(c) \neq 0$, ta tìm khoảng phân ly nghiệm mới $[a_1, b_1]$ trong đó:

i) $[a_1, b_1] \equiv [a, c]$ nếu $f(a).f(c) < 0$

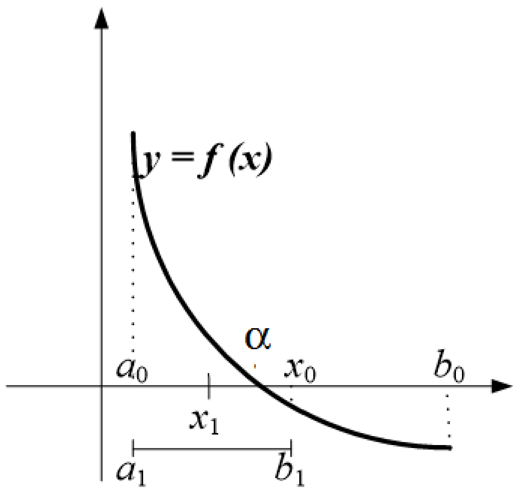
ii) $[a_1, b_1] \equiv [c, b]$ nếu $f(b).f(c) < 0$

Tiếp tục quá trình trên, ta thu được khoảng $[a_n, b_n]$ thỏa $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$; Lấy a_n hoặc b_n là nghiệm gần đúng của hệ, khi đó ta có sai số:

$$|\alpha - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n+1}};$$

hoặc

$$|\alpha - b_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$



Hình 2.1: Phương pháp chia đôi.

Thí dụ 2.1. *Cho phương trình $5x^3 - \cos 3x = 0$. Sử dụng phương pháp chia đôi:*

i) Tìm nghiệm gần đúng của phương trình trên sau 5 lần lặp. Đánh giá sai số ở lần lặp thứ 5.

ii) Phải lặp ít nhất bao nhiêu lần để được nghiệm gần đúng có sai số không quá 10^{-4}.

....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....

2.2 Phương pháp lặp đơn

Cho phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thực trong khoảng $[a, b]$, ta viết lại $x + f(x) - x = 0$. Đặt $\varphi(x) = x + f(x)$.
Từ đây, ta có

$$x = \varphi(x) \tag{2.2}$$

Chọn giá trị gần đúng đầu tiên của nghiệm $x_0 \in [a, b]$. Từ (2.2), ta xây dựng dãy lặp:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \tag{2.3}$$

Khi này, hàm $\varphi(x)$ được gọi là hàm lặp.

Định nghĩa 2.2. *Hàm $\varphi(x)$ được gọi là hàm co trên đoạn $[a, b]$, nếu có $0 < q < 1$, sao cho*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \forall x, y \in [a, b]. \tag{2.4}$$

khi đó, q được gọi là hệ số co.

Để kiểm tra hàm co, ta có tiêu chuẩn sau:

Định lý 2.3. *Nếu hàm $\varphi(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và có q thỏa $0 < q < 1$ sao cho $|\varphi(x)| \leq q, \forall x \in [a, b]$. Khi đó, $\varphi(x)$ là hàm co với hệ số co q.*

Định lý 2.4. *(Sự hội tụ của phương pháp)*

i) $[a, b]$ là khoảng phân ly nghiệm a của phương trình $f(x) = 0$;

ii) Hàm $\varphi(x)$ là hàm co trên $[a, b]$.

Khi đó, phương pháp lặp (2.3) hội tụ với mọi $x_0 \in [a, b]$, tức $x_n \to \alpha$ khi $n \to \infty$, hơn nữa, ta có:

$$|\alpha - x_n| \leq (b - a)q^n \tag{2.5}$$

Chú thích 1. *Có thể dùng (2.5) nhưng công thức này thường cho sai số quá lớn so với thực tế, do vậy, ta có thể ước lượng sai số theo công thức sau:*

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n|}{m} \quad \textit{trong đó} \quad m = \min|f'(x)|\,; a < x < b. \tag{2.6}$$

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_0 - x_1| \tag{2.7}$$

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \tag{2.8}$$

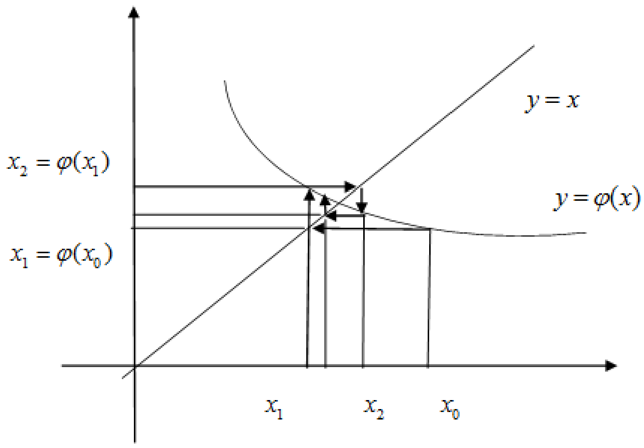
Chú thích 2. *Trong quá trình chọn* x_0

i) Nếu $\varphi^{'}(x) > 0$, *ta chọn tùy ý* $x_0 \in [a,b]$

ii) Nếu $\varphi^{'}(x) < 0$, *ta xét dấu* $f(a).f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{khi } a < \alpha < \frac{a+b}{2}; \\ b, & \text{khi } \frac{a+b}{2} < \alpha < b. \end{cases}$$

Chú thích 3. *Để đảm bảo điều kiện hội tụ, có thể làm như sau:*
Đặt $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$; *sau đó chọn* λ *từ điều kiện:*
$\varphi^{'}(x) = 1 - \lambda f^{'}(x) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{f^{'}(x)}$;



Hình 2.2: Phương pháp lặp đơn

Thí dụ 2.2. *Cho phương trình* $x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ *với khoảng phân li nghiệm* $[3,4]$. *Chọn giá trị xấp xỉ ban đầu* $x_0 = 3.5$. *Tính nghiệm gần đúng* x_4 *và sai số tương ứng.*
Ta đưa phương trình về dạng $x = \varphi(x)$. *Có nhiều cách xây dựng hàm* $\varphi(x)$, *tuy nhiên, chúng ta chú ý điều kiện hội tụ của phương pháp:*

$$x = \frac{x^2}{3} - \frac{5}{x} = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \varphi^{'}(x) = \frac{2x}{3} + \frac{5}{x^2}$$

không phải là hàm co.

$$x = 3 + \frac{5}{x^2} = \varphi(x) \Rightarrow \varphi^{'}(x) = -\frac{10}{x^3} \quad \Rightarrow |\varphi^{'}(x)| \leq \frac{10}{27} = q < 1, \forall x \in [3,4]$$

hiển nhiên $\varphi(x) \in [3,4]$.
Xây dựng dãy lặp:

$$\begin{cases} x_0 = 3.5 \\ x_n = 3 + \frac{5}{x_{n-1}^2}, \forall n = 1,2,... \end{cases}$$

Ta có bảng số liệu sau:

n	x
0	3.500000000000000
1	3.408163265306123
2	3.430456452364732
3	3.424879897039618
4	3.426264643531233

Sai số:

$$\Delta_4 = \frac{q}{1-q}\,|x_4 - x_3| = 0.005576555325113\frac{\frac{10}{27}}{1-\frac{10}{27}} \approx 0.003280326661831$$

Thí dụ 2.3. *Cho phương trình* $x - \cos x = 0$ *có khoảng phân ly nghiệm* $[0,1]$. *Chọn giá trị lặp ban đầu* $x_0 = 1$. *Xác định số lần lặp* n *khi xấp xỉ nghiệm của phương trình với sai số* 10^{-8}.
Ta đưa phương trình về dạng $x = \cos x = \varphi(x)$. *Khi đó,* $\varphi(x)$ *là hàm co với hệ số co* $q = \sin 1 < 1$.
Ngoài ra $\varphi(x) \in [0,1]$ *nên phương pháp lặp hội tụ.*
Dãy lặp: $x_0 = 1; x_n = \varphi(x_{n-1})$.
Sử dụng công thức đánh giá sai số:

$$|x_n - x| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leq 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \quad n \geq \frac{\log\left(\frac{(1-q)\,10^{-8}}{|x_1 - x_0|}\right)}{\log q} = 112.8904$$

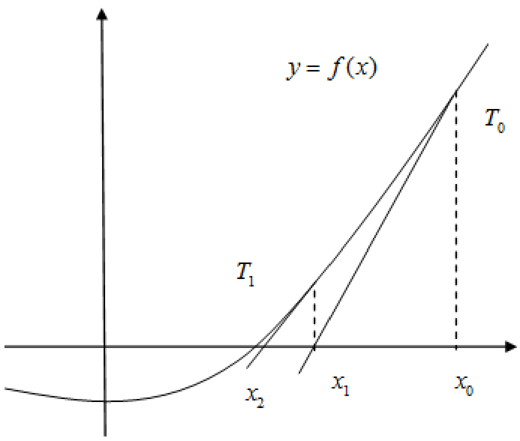
Vậy số lần lặp là $n = 113$.

Thí dụ 2.4. *Tìm nghiệm gần đúng của phương trình* $2 - \lg x - x = 0$ *với độ chính xác đến* $0,001$.
ĐS: $1,755$.

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.3 Phương pháp tiếp tuyến



Hình 2.3: Phương pháp tiếp tuyến

Hàm $f(x)$ xác định và có đạo hàm đến cấp n+1 tại x_0 và lân cận x_0.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ...+ \\ &+ \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \tfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1$
- Giả sử $f(x) = 0$:

i) Có nghiệm thực a phân ly trong [a, b];

ii) Có đạo hàm $f'(x) \neq 0$ tại $x \in [a, b]$;

iii) Có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ tại $x \in [a, b]$;

Chọn $x_0 \in [a,b]$, khai triển Taylor bậc nhất của f(x) tại x_0, ta được:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi);$$

Bỏ qua số hạng cuối, (2.9) trở thành:

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0 \tag{2.10}$$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f''(x_0)}$; $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$;
Tổng quát, ta có nghiệm xấp xỉ sau n lần lặp

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \tag{2.11}$$

Định lý 2.5. *(Điều kiện hội tụ và sai số)*
$f(x)$ có đạo hàm cấp $f'(x), f''(x)$ liên tục và không đổi dấu trên $[a,b]$, khi đó nếu chọn x_0 thỏa $f(x_0) f''(x_0) > 0$ thì nghiệm xấp xỉ bởi (2.11) hội tụ về nghiệm chính xác khi $n \to \infty$, hơn nữa, ta có:

$$|\alpha - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m}; \text{ với } 0 < m \le |f'(x)|, a \le x \le b. \tag{2.12}$$

Chú thích 4. *Do* (2.11) *được dùng thay thế cho* (2.1) *là tuyến tính đối với x, nên phương pháp Newton cũng gọi là phương pháp tuyến tính hóa. Hơn nữa, phương pháp Newton cũng là phương pháp lặp đơn với hàm lặp:*
$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Thí dụ 2.5. *Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $2^x - 4x = 0$ với độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$.*
Gọi $f(x) = 2^x - 4x$
$f'(x) = 2^x \ln 2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{4}{\ln 2}\right) = 2.5288$
Ta có $f(0) = 1; f(1) = -2$. Từ đây, ta có khoảng phân li nghiệm $[0,1]$
Mặt khác :$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2$
Ta có $f''(0) = 0.4805$. Do vậy, ta chọn $x_0 = 0$.
Công thức lặp

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_n - \frac{2^{x_{n-1}} - 4x_{n-1}}{2^{x_{n-1}} \ln 2 - 4}.$$

Ta có bảng kết quả :

n	x	Δx
0	0	
1	0.302402330736125	0.302402330736125
2	0.309901618502272	0.007499287766147
3	0.309906932378013	0.000005313875741

Từ đây, ta chọn nghiệm gần đúng sau lần lặp thứ ba $x = 0.3099$.

Thí dụ 2.6. *Tìm nghiệm gần đúng của phương trình* $x^4 - 2x - 4 = 0$ *có độ chính xác đến* $0,01$.
ĐS: $1,64$.
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3 Bài tập

2.1. *Giải các phương trình sau bằng phương pháp lặp với sai số không quá* 10^{-4}

1. $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1,5; 2,5]$.
2. $x^3 - x - 1 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1; 2]$.
3. $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[0,2; 0,5]$.
4. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1,2; 1,8]$.
5. $x^2 - x + \sqrt{\arcsin x + 2} = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[-0,8; 0]$.
6. $\frac{(x+1)^6 - x(x-1)}{(x+1)^4} = 6$ *có đoạn phân li nghiệm* $[1; 2]$.
7. $\arctan x + 3 - x^3 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1; 2]$.
8. $\ln\left(x^2 + 1\right) - x^3 + \cos x = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1; 1,2]$.
9. $\sqrt{x^2 + 2} + x\cos x - 2 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[0,4; 0,6]$.
10. $\frac{1}{x^2+1} + \sqrt{x+2} - x^2 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1; 2]$.

2.2. *Giải các phương trình sau bằng phương pháp Newton với sai số không quá* 10^{-4}

1. $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1; 2]$.
2. $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1,3; 2]$.

3. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1; 2]$ *và* $[2, 8; 4]$.

4. $\sin x - e^{-x} = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[0; 1], [3, 4]$ *và* $[6; 7]$.

5. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{4}{(x+1)^4} = 5$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[0; 1]$.

6. $\frac{(x+2)^5 - x(x+1)}{3(x+2)^3} = 1$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[-0, 8; 0]$.

7. $2x^5 - 3x^2 - 4 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1; 2]$.

8. $x \ln(2x+3) - x^3 + 2 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1, 5; 2]$.

9. $x^5 - 5 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[1; 2]$*, từ đó suy ra giá trị gần đúng của* $\sqrt[5]{5}$.

10. $\arctan^2 x + x - x^3 + 1 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm là* $[2; 2, 5]$

2.3. *Cho phương trình* $x^3 - 2x - 6 = 0$ *có đoạn phân li nghiệm* $[2; 3]$

i) Giải phương trình trên bằng phương pháp lặp (lặp 3 bước, đánh giá sai số ở bước 3)

ii) Tìm số bước lặp nhỏ nhất để nghiệm gần đúng có sai số không quá 10^{-10}.

2.4. *Cho phương trình* $3x^3 - x^2 - 2\cos x = 10$ *có khoảng phân li nghiệm là* $[1, 3; 2]$.

i) Giải phương trình trên bằng phương pháp Newton (lặp 3 bước, đánh giá sai số ở bước 3)

ii) Tìm số bước lặp nhỏ nhất để chắc chắn nghiệm gần đúng có sai số không quá 10^{-10}.

Chương 3

GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1 Giới thiệu

Trong phạm vi bài học, ta khảo sát hệ:

$$AX = B, \text{với } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

trong đó, sự tồn tại và duy nhất nghiệm được thỏa mãn.

2 Phương pháp Gauss

2.1 Các ma trận đặc biệt

Ma trận chéo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$detA = a_{11}a_{22}...a_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i.$
Nghiệm $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$
Ma trận tam giác dưới :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$detA = a_{11}a_{22}...a_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i.$
Nghiệm :

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_k &= \frac{1}{a_{kk}}\left[b_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right], k=\overline{2,n} \end{cases}$$

Ma trận tam giác trên :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$detA = a_{11}a_{22}...a_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i.$

Nghiệm

$$\begin{cases} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_k &= \frac{1}{a_{kk}}\left[b_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right], k=\overline{n-1,1} \end{cases}$$

2.2 Phương pháp Gauss

Ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa A về ma trận tam giác trên. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng:

1. Hoán chuyển hai dòng;
2. Nhân một dòng với một số khác không;
3. Cộng một dòng với một dòng khác.

Thí dụ 3.1. *Giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4 \end{cases}$$

Giải:

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4 = h_4 - h_1]{\substack{h_2 = h_2 - 2h_1 \\ h_3 = h_3 - h_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4 = h_4/2]{h_2 \leftrightarrow h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_4 = h_4 + h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Giải hệ phương trình ma trận tam giác trên, ta được nghiệm $x = (-7, 3, 2, 2)^t$

3 Phương pháp lặp

3.1 Chuẩn

Chuẩn vector

Định nghĩa 3.1. *Chuẩn vector $x \in \mathbb{R}^n$ là một hàm số thực ký hiệu $\|x\|$ thỏa mãn ba điều kiện sau:*

- $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Có nhiều công thức chuẩn khác nhau, ta xét hai chuẩn sau:
$x \in \mathbb{R}^n$

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq x \leq n} \{|x_i|\}$$
$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Chuẩn ma trận: Xét ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$

Định nghĩa 3.2. *Chuẩn của ma trận A được xác định theo công thức:*

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Định lý 3.1. *Cho ma trận $A = (a_{ij})_n$, ta có:*

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

$$\|A|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Hội tụ theo chuẩn:

Định nghĩa 3.3. *Dãy các vector* $\left\{x^{(n)}\right\}, x^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ *được gọi là hội tụ theo chuẩn về* x*, nếu* $\left\|x^{(m)} - x\right\| \to 0, khi\ m \to +\infty$

Định lý 3.2. *Dãy các vector* $\left\{x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)}\right)\right\}$ *hội tụ về* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *theo chuẩn khi và chỉ khi dãy* $x_k^{(m)}$ *hội tụ về* $x_k, k = \overline{1, n}$.

3.2 Phương pháp lặp

Ta đưa hệ (3.1) về dạng:

$$x = Tx + c$$

trong đó $T = (t_{ij})_n, c = (c_j)_{n\times 1}$. Cụ thể:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ .. \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Để tìm nghiệm xấp xỉ, xuất phát từ vector ban đầu $x^{(0)}$, ta xây dựng dãy lặp theo công thức:

$$x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c, \forall m = 1, 2, ... \tag{3.2}$$

vấn đề đặt ra là sự hội tụ của dãy $\{x^{(m)}\}$. Ta có định lý sau:

Định lý 3.3. *Nếu* $\|T\| < 1$ *thì dãy lặp được* $\{x^m\}$ *xác định bởi công thức (3.2) sẽ hội tụ về nghiệm chính xác của hệ với mọi vetor ban đầu* $x^{(0)}$*. Hơn nữa sai số dược xác định bởi:*

$$||x^{(m)} - x|| \le \frac{||T||^m}{1 - ||T||}||x^{(1)} - x^{(0)}|| \tag{3.3}$$

$$||x^{(m)} - x|| \le \frac{||T||}{1 - ||T||}||x^{(m)} - x^{(m-1)}|| \tag{3.4}$$

Trong đó (5.2) được gọi là sai số tiền nghiệm, (3.4) là sai số hậu nghiệm.

Thí dụ 3.2. *Cho hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 & = 7 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 & = 8 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 & = 9 \end{cases}$$

i) Tìm nghiệm gần đúng $x^{(5)}$ *với vector ban đầu* $x^{(0)} = 0$

ii) Đánh giá sai số của nghiệm $x^{(5)}$.

Giải: Ta đưa hệ về dạng:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{10}(\quad +x_2 + x_3 + 7) \\ x_2 = \frac{1}{10}(-x_1 + \quad -x_3 + 8) \\ x_3 = \frac{1}{10}(x_1 - x_2 + \quad +9) \end{cases}$$

viết lại dưới dạng ma trận:$x = Tx + c$, trong đó:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

Khi đó, ta có công thức lặp

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = \frac{1}{10}\left(\quad -x_2^{(m-1)} + x_3^{(m-1)} + 7\right) \\ x_2^{(m)} = \frac{1}{10}\left(-x_1^{(m-1)} \quad - x_3^{(m-1)} + 8\right) \\ x_3^{(m)} = \frac{1}{10}\left(x_1^{(m-1)} - x_2^{(m-1)} \quad + 9\right) \end{cases}$$

Ta có bảng kết quả sau:

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
x_1	*0*	*0.7000000000*	*0.7100000000*	*0.7250000000*	*0.7267000000*	*0.7271700000*
x_2	*0*	*0.8000000000*	*0.6400000000*	*0.6400000000*	*0.6368000000*	*0.6364800000*
x_3	*0*	*0.9000000000*	*0.8900000000*	*0.9070000000*	*0.9085000000*	*0.9089900000*

Đánh giá sai số:

$$||x^{(5)} - x||_\infty \le \frac{||T||_\infty}{1 - ||T||_\infty}||x^{(5)} - x^{(4)}||_\infty$$

$$||x^{(5)} - x||_\infty \le \frac{0.2}{0.8}4.9 \times 10^{-4} = 0.1225 \times 10^{-3}$$

4 Phương pháp Seidel

Ta đưa hệ về dạng:
$x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c$, tuy nhiên, trong mỗi vòng lặp, giá trị $x_{k-1}^{(m)}$ được sử dụng để tính thành phần liền sau nó $x_k^{(m)}$

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_i^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_i^{(m-1)} + b_i\right], \ \forall i = 1, n \quad .$$

Hay:

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = t_{11}x_1^{(m-1)} + t_{12}x_2^{(m-1)} + \cdots + t_{1n-1}x_{n-1}^{(m-1)} + t_{1n}x_n^{(m-1)} + c_1 \\ x_2^{(m)} = t_{21}x_1^{(m)} + t_{22}x_2^{(m-1)} + \cdots + t_{2n-1}x_{n-1}^{(m-1)} + t_{2n}x_n^{(m-1)} + c_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \cdots \vdots \quad \vdots \\ x_n^{(m)} = t_{n1}x_1^{(m)} + t_{n2}x_2^{(m)} + \cdots + t_{nn-1}x_{n-1}^{(m)} + t_{nn}x_n^{(m-1)} + c_n \end{cases}$$

Do vậy, ta có phân tích sau:

$$x^{(m)} = Lx^{(m)} + Ux^{(m-1)} + C \Leftrightarrow x^{(m)} = (I_n - L)^{-1}(Ux^{(m-1)} + C)$$

với $U + L = T$.
Đánh giá sai số:

Định lý 3.4. *Phương pháp hội tụ với $||T|| < 1$, hơn nữa ta có:*

$$||x_m - x_{ex}|| \leq \frac{\|L\|}{1 - \|T\|} \left\| x^{(m)} - x^{(m-1)} \right\|$$

Thí dụ 3.3. *Cho hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 20x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + 20x_2 - x_3 = 13 \\ -2x_1 - x_2 + 20x_3 = 14 \end{cases}$$

i) Tìm ma trận T, c;

ii) Tìm nghiệm xấp xỉ $x^{(4)}$; đánh giá sai số.

Giải:
Ta đưa hệ về dạng:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{20}(\quad +x_2 - 2x_3 + 12) \\ x_2 = \frac{1}{20}(-x_1 \quad + x_3 + 13) \\ x_3 = \frac{1}{20}(2x_1 \quad + x_2 \quad + 14) \end{cases}$$

Viết dưới dạng ma trận :$x = Tx + c$, trong đó:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -0.050000000000000 & 0.100000000000000 \\ 0.050000000000000 & 0 & -0.050000000000000 \\ -0.100000000000000 & -0.050000000000000 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 0.600000000000000 \\ 0.650000000000000 \\ 0.700000000000000 \end{pmatrix}$$

Khi đó, công thức lặp có dạng:

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = \frac{1}{20}(\quad +x_2^{(m-1)} - 2x_3^{(m-1)} + 12) \\ x_2^{(m)} = \frac{1}{20}(-x_1^{(m)} \quad + x_3^{(m-1)} + 13) \\ x_3^{(m)} = \frac{1}{20}(2x_1^{(m)} \quad + x_2^{(m)} \quad + 14) \end{cases}$$

Ta có bảng dữ liệu sau:

n	0	1	2	3	4
x_1	0	0.6000000000	0.5519000000	0.554268975000000	0.554233852493750
x_2	0	0.6200000000	0.6619550000	0.661700938750000	0.661713904597187
x_3	0	0.7910000000	0.7882877500	0.788511944437500	0.788509080479234

Sai số ở lần lặp thứ tư:

$||x^{(4)} - x|| \leq \frac{0.15}{0.85} 3.5123 \times 10^{-5} = 0.6199 \times 10^{-5}$

5 Bài tập

3.1. *Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn (lặp 3 bước),sau đó sử dụng phương pháp Seidel (qua 3 lần lặp), đánh giá sai số ở bước 3 trong hai trường hợp trên. Nêu nhận xét.*

1. $\begin{cases} 5x + y + 2z &= 5 \\ 3x + 8y + z &= 8 \\ x - 3y + 10z &= 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -10x + y - z &= -10 \\ 2x + 20y - z &= 21 \\ -x + 3y + 16z &= 18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0,5x + 0,01y + 0,2z &= 0,4 \\ 0,2x + 0,8y + 0,1z &= 0,98 \\ 0,2x + y + 2z &= 3,2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 1,2x + 0,2y - 0,3z &= 2,1 \\ x + 4y - 2,1z &= 2,2 \\ -0,2x + 0,3y + 1,6z &= 1,8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 10x - y + z + 2t &= 3 \\ 2x + 30y - z + 5t &= 4 \\ -x + 4y + 20z - t &= 19 \\ 5x + 3y - z + 25t &= 24 \end{cases}$

6. $\begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ -1 & 4,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & -0,5 & 6 & 2 \\ 0 & 2,5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4,5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

7. $\begin{cases} 8x + 2y + 3z &= 4,4998 \\ 2x + 7y + 2z &= 4,3820 \\ 3x + 4y + 10z &= 4,7875 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 9x - 2y + 3z + t &= 5,0039 \\ 2x + 15y + z + 3t &= 6,3801 \\ -x - 4y + 21z + 8t &= 6,8112 \\ x + 3y + 2z + 10t &= 6,9098 \end{cases}$

3.2. *Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp Seidel (lặp 3 bước, đánh giá sai số ở bước 3)*

1. $\begin{cases} 1,5x + 0,1y + 0,3z &= 1,2 \\ 0,02x + y + 0,15z &= 3,5 \\ 0,1x + 0,3y + 2z &= 4,1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 0,2y - 0,3z &= 4,2 \\ x - 8y - 2,1z &= 6,2 \\ 1,2x + 0,3y + 6z &= 3,7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 20x - y + 2z + t &= 8 \\ 2x + 10y + z + 5t &= 9 \\ 2x + 4y + 20z - t &= 21 \\ 3x + 3y - z + 20t &= 14 \end{cases}$

4. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & -5 & 0,1 \\ 2 & -25 & 2 & 3,2 \\ 0,4 & -5 & 16 & 2 \\ 0 & 2,5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} 20x + 2y + 6z &= 5,2470 \\ 8x + 25y + 2z &= 6,7822 \\ x + 2y + 16z &= 5,7683 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9x - 2y + 3z + t &= 5,0039 \\ 2x + 15y + z + 3t &= 6,3801 \\ -2x - 4y + 21z + 8t &= 6,8112 \\ x + 3y + 2z + 10t &= 6,9098 \end{cases}$

3.3. *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} 10x - y - z &= 18 \\ x + 20y - z &= 21 \\ 2x + 4y + 20z &= 28 \end{cases}$

i) Giải hệ trên bằng phương pháp lặp đơn với sai số không quá 10^{-3}.

ii) Phải lặp ít nhất bao nhiêu bước (ở câu i)) thì sai số nghiệm gần đúng không quá 10^{-6}.

3.4. *Cho hệ phương trình* $\begin{pmatrix} 25 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -10 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 10 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 20 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Khi sử dụng phương pháp lặp đơn để xác định nghiệm gần đúng, phải lặp ít nhất bao nhiêu bước thì sai số nghiệm gần đúng không quá 10^{-6}. *Sử dụng phương pháp Seidel, tìm nghiệm gần đúng qua 3 lần lặp. Đánh giá sai số.*

3.5. *Cho hệ phương trình* $\begin{pmatrix} 20 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 25 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -20 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -19 \\ 11 \end{pmatrix}$

i) Giải hệ trên bằng phương pháp lặp Seidel với sai số không quá 10^{-3}.

ii) Phải lặp ít nhất bao nhiêu bước (ở câu i)) thì sai số nghiệm gần đúng không quá 10^{-6}.

Chương 4

ĐA THỨC NỘI SUY- PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

1 Đa thức nội suy

1.1 Đặt vấn đề

Cho hàm số $y = f(x)$ không biết biểu thức giải tích của hàm; biết giá trị của hàm tại một số hữu hạn điểm trên đoạn $[a, b]$ (bằng đo đạc hoặc thực nghiệm):

x	x_0	x_1	...	x_i	...	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	...	y_i	...	y_{n-1}	y_n

Tìm giá trị của hàm số tại một số điểm trung gian khác.
Từ đây, ta có bài toán nội suy như sau:
Tìm hàm số $\varphi(x)$ có biểu thức đơn giản, có giá trị trùng với giá trị của $f(x)$ tại các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$, còn tại các điểm khác trên đoạn$[a, b]$ thì $\varphi(x)$khá gần$f(x)$ (phản ảnh gần đúng quy luật f(x)), từ đó có thể suy ra giá trị gần đúng của $f(x)$ tại các giá trị x bất kỳ thoả mãn $x_0 < x < x_n$.
Khi đó, $\phi(x)$ được gọi là hàm nội suy của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$.

Chú thích 5. *Về mặt hình học, ta xây dựng đường cong $y = \varphi(x)$ đi qua các điểm $(x_i, y_i), i = \overline{0, n}$.*

1.2 Đa thức nội suy

Thường chọn đa thức làm hàm nội suy vì:

1. Đa thức là loại hàm đơn giản;
2. Luôn có đạo hàm và nguyên hàm;
3. Việc tính giá trị của chúng đơn giản.

Bài toán:
Trên đoạn $a \leq x \leq b$ cho một lưới các điểm chia (điểm nút)

$x_i; i = \overline{0, n};$ với $a \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq b$.
Cho giá trị tương ứng của hàm $y = f(x)$ tại các nút:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

Cần xây dựng một đa thức bậc n:

$$P^n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \tag{4.1}$$

sao cho $P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = \overline{0, n}$

Định lý 4.1. *Đa thức nội suy của hàm số $f(x)$, nếu có, thì duy nhất.*

1.3 Đa thức nội suy Lagrange

Có dạng:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x);$$

trong đó:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)};$$

thỏa mãn :

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, \text{nếu} & i = j \\ 0, \text{nếu} & i \neq j \end{cases}$$

Khi đó sai số được xác định bởi :

Định lý 4.2. *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên [a, b] và có trong [a, b] đạo hàm liên tục đến cấp n+1 thì sai số nội suy $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ có biểu thức:*

$$r_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{\pi(x)}{(n+1)!}; c \in [a, b] \tag{4.2}$$

với $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$, c là giá trị trung gian giữa x và $x_0, x_1, ..., x_n$

Chú thích 6. *Gọi $M = \max\left|f^{(n+1)}(x)\right|; x \in [a, b]$*
thì ta được $|r_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\pi(x)|$.

Chú thích 7. *Ưu điểm của đa thức nội suy Lagrange: đơn giản;*
Nhược điểm: khi thêm một nút nội suy thì phải tính lại toàn bộ đa thức cơ sở.

Chú thích 8. *Trường hợp các nút cách đều, với bước* $h = x_{i+1} - x_i$, *đặt* $q = \frac{(x-x_0)}{h}$, *ta có:*
$x_i = x_i + ih \Rightarrow x - x_i = x - x_0 - ih = (q-i)h; x_i - x_j == (i-j)h.$
Lúc này :

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n) = q(q-1)\dots(q-n)h^{n+1}$$

$$\omega^{/}(x_i) = (x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n) = (-1)^{n-i}i!(n-i)!h^n$$

Khi đó, da thức nội suy Lagrange được viết lại như sau:

$$P_n(x) = q(q-1)...(q-n)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}y_k}{k!(n-k)!(q-k)} \tag{4.3}$$

Thí dụ 4.1. *Cho hàm số* $f(x)$ *và bảng số liệu sau:*

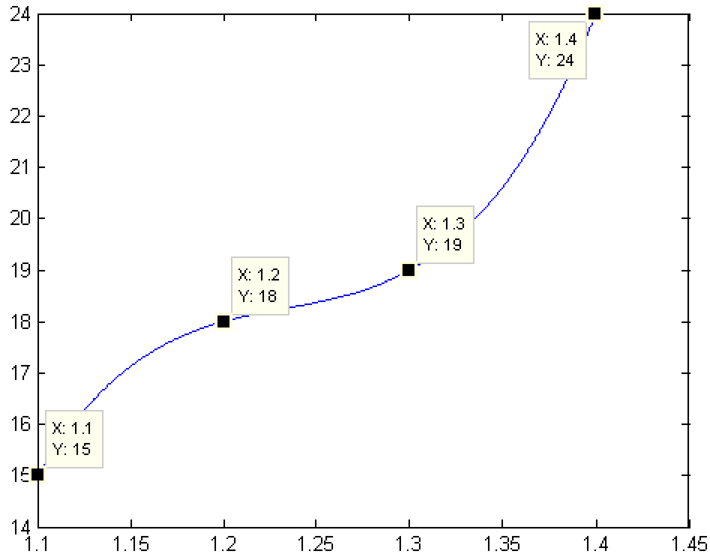
x	1.1	1.2	1.3	1.4
y	15	18	19	24

Tính $f(1.25)$.
Giải: Ta có đa thức nội suy :

$$P_3(x) = 4000(x-\frac{6}{5})(x-\frac{11}{10})(x-\frac{13}{10}) - 2500(x-\frac{6}{5})(x-\frac{7}{5})(x-\frac{13}{10})$$

$$-9500(x-\frac{6}{5})(x-\frac{7}{5})(x-\frac{11}{10}) + 9000(x-\frac{7}{5})(x-\frac{11}{10})(x-1310)$$

$$P_3(1.25) = (1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)[-\frac{15}{3!(1.5)}+\frac{18}{2!(0.5)}-\frac{19}{2!(-0.5)}+\frac{24}{3!(-1.5)}] = 18.375$$



Hình 4.1: Tương quan giữa dữ liệu và đa thức nội suy tương ứng

1.4 Đa thức nội suy Newton

Tỷ sai phân:
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và bảng dữ liệu :
Đại lượng $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$ được gọi là tỷ sai phân **cấp một** của hàm số trên $[x_i, x_{i+1}]$.
Tương tự, ta có tỷ sai phân **cấp hai** $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$
Bằng quy nạp, ta có tỷ sai phân **cấp p** như sau:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+p}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}]}{x_{i+p} - x_i}$$

Đa thức nội suy Newton:
Từ tỷ sai phân cấp 1:

$$f[x, x_0] = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$
$$\Rightarrow f(x) = y_0 + f[x, x_0](x - x_0)$$

Tương tự, từ tỷ sai phân cấp hai:

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x,x_0]}{x_1-x}$$
$$\Rightarrow f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$
$$\Rightarrow f(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1)$$

Tiếp tục bằng quy nạp, ta được :

$$\begin{aligned}
&f(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... \\
&+f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1) \, ... \, (x - x_{n-1}) \\
&+f[x, x_0, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1) \, ... \, (x - x_n)
\end{aligned}$$

Đặt:

$\aleph_n^{(1)}(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ...$

$+f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1) \, ... \, (x - x_{n-1})$

$\Re_n(x) = f[x, x_0, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1) \, ... \, (x - x_n)$

Ta được:

$$f(x) = \aleph_n^{(1)}(x) + \Re_n(x)$$

Công thức này được gọi là công thức Newton tiến xuất phát từ điểm x_0.
Tương tự, ta có công thức Newton lùi:

$f(x) = \aleph_n^{(2)}(x) + \Re_n(x)$

$\aleph_n^{(2)}(x) = y_n + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + ...$

$+f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \, ... \, (x - x_1)$

$\aleph_n^{(1)}(x)$đa thức nội suy Newton tiến
$\aleph_n^{(2)}(x)$đa thức nội suy Newton lùi
$\Re_n(x)$sai số nội suy

Nếu $f(x)$ có đạo hàm đến cấn $n+1$, ta có đánh giá sai số:

$$|\Re_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)| \text{ với } M_{n+1} = \max \left| f^{(n+1)}(x) \right| \tag{4.4}$$

Thí dụ 4.2. *Cho hàm số f xác định trên $[0, 1]$ và bảng số liệu sau:*

x	0	0.3	0.7	1
y	2	2.2599	2.5238	2.7183

Tính gần đúng $f(0.12)$ bằng đa thức nội suy Newton tiến và $f(0.9)$ bằng đa thức nội suy Newton lùi.
Giải:
Ta có bảng tỷ sai phân :

y	*x*	*TH1*	*TH2*	*TH3*
2.0000	*0*			
		0.8663		
2.2599	*0.3*		*-0.2951*	
		0.6598		*0.2788*
2.5238	*0.7*		*-0.0163*	
		0.6483		
2.7183	*1*			

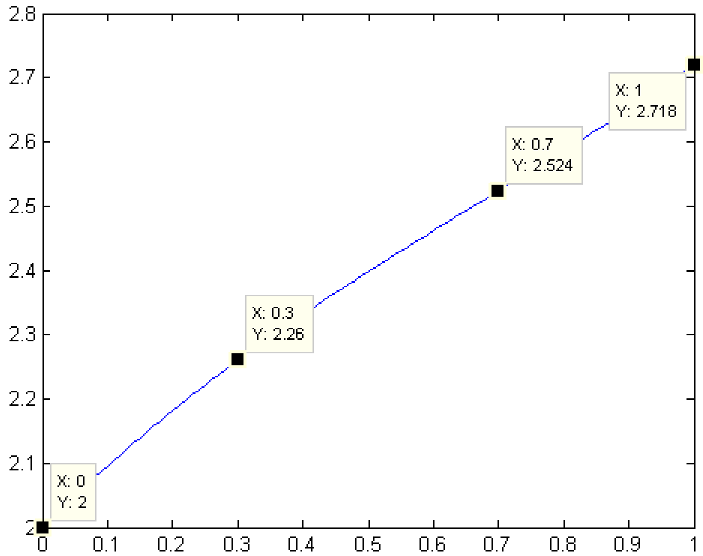
Từ bảng trên, ta có đa thức nội suy Newton tiến:

$$\frac{2599x}{3000} - 2479x(x - \frac{3}{10}))8400 + \frac{1171x(x - \frac{3}{10})(x - \frac{7}{10})}{4200} + 2$$

từ đây ta có giá trị cần tìm $f(0.12) = 2.1138$
Đa thức nội suy Newton lùi:

$$\frac{389x}{600} - \frac{9181445668895(x-1)(x - \frac{7}{10})}{562949953421312} + \frac{1171(x-1)(x - \frac{3}{10})(x - \frac{7}{10})}{4200} + \frac{62099}{30000}$$

Giá trị cần tìm $f(0.9) = 2.6504$.



Hình 4.2: Tương quan giữa dữ liệu và đa thức nội suy tương ứng

Chú thích 9. [1] *Trong trường hợp các nút nội suy cách đều, ta có:*
$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ *hiệu hữu hạn tiến cấp 1;*
$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ *cấp 2;....*
Tương tự:
$\nabla y_{i+1} = y_{i+1} - y_i$;
$\nabla^2 y_{i+1} = \nabla(\nabla y_{i+1}) = \nabla y_{i+1} - \nabla y_i$ *hiệu hữu hạn lùi.*

$$f[x_0, x_1] = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{\nabla y_n}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} = \frac{\nabla^2 y_n}{2!h^2}$$

[1] Thiết lập đa thức nội suy Newton lùi.

$$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} = \frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}$$

Khi đó:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} + ... + (x - x_0)...(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

Đổi biến số: $t = \frac{x - x_0}{h}$. *Ta có:*

$$P_n(x) = P_n(x_0 + ht) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

2 Phương pháp bình phương bé nhất

Trong thực tế, những dữ liệu đo đạc đôi khi không hoàn toàn chính xác , do vậy , để tìm dạng đúng của hàm số nội suy bảng dữ liệu gặp nhiều khó khăn và không còn chính xác.
Đặt bài toán: tìm hàm số $f(x)$ xấp xỉ bảng dữ liệu $M_i(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$ theo phương pháp bình phương bình phương cực tiểu.Tức là tổng bình phương sai số:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \tag{4.5}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.
Hàm $f(x)$ rất đa dạng. Để đơn giản, trong thực tế, ta thường tìm hàm f theo một trong các dạng sau:

$f(x) = ax + b;$ $\quad f(x) = a + bx + cx^2$

$f(x) = a + b\cos x + c\sin x;$ $\quad f(x) = a^{bx}(a > 0)$

$f(x) = ax^b(a > 0)$

2.1 Trường hợp $f(x) = ax + b$

Hàm bình phương cực tiểu có dạng:
$\varepsilon(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$
Ta sẽ tìm a, b sao cho ε nhỏ nhất. Khi đó a, b thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - b - ax_i)\, x_i = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - b - ax_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Mà

$$D = \begin{vmatrix} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) & n \end{vmatrix} = n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum\limits_{i<j}^{n} (x_i - x_j)^2 > 0$$

nên hệ trên luôn có nghiệm duy nhất.

Thí dụ 4.3. *Xây dựng hàm số $y = f(x) = ax + b$ xấp xỉ bảng dữ liệu sau:*

x	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
y	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7

Theo phương pháp BPCT, $n = 10$, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29a + 10b & = 39 \\ 109a + 29b & = 140 \end{cases}$$

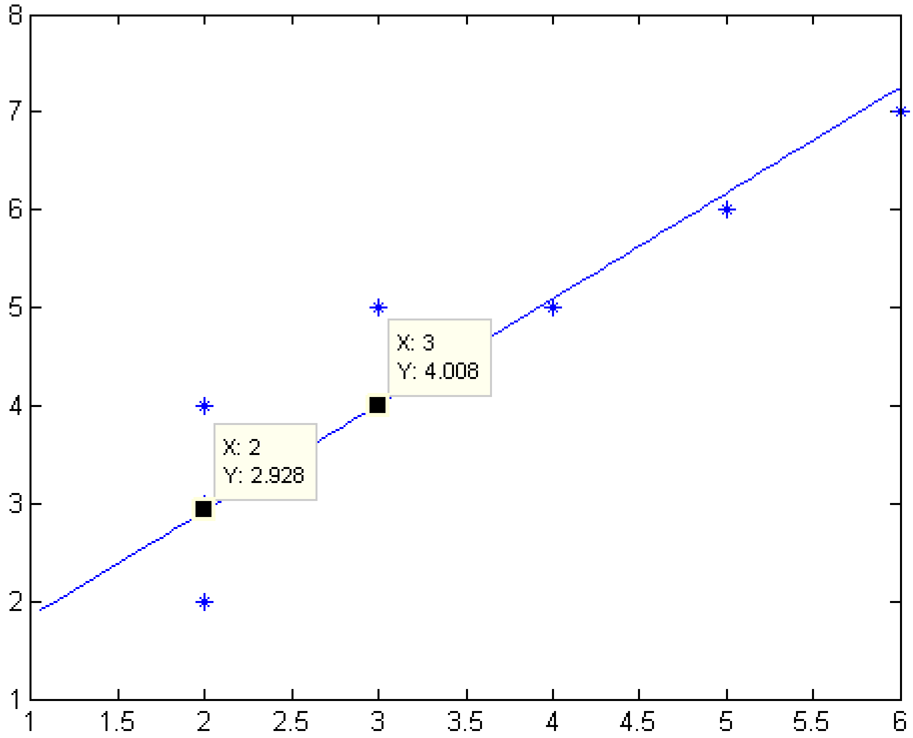
Giải hệ, ta được $a = 1.0803, b = 0.7671$.
Vậy hàm số cần tìm $y = 1.0803x + 0.7671$

2.2 Trường hợp $f(x) = ax^2 + bx + c$

Vì các cặp số $(x_i; y_i)$ trong bảng là do thực nghiệm mà có, do vậy chúng hoàn toàn không xác định nghiệm đúng của phương trình $y = ax^2 + bx + c$.
Sai số tại mỗi điểm $(x_i; y_i)$ là $\varepsilon_i = y_i - c - bx_i - ax_i^2$. Do vậy, tổng bình phương các sai số là $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - c - bx_i - cx_i^2\right)^2$. Chúng ta sẽ tìm a, b, c để cực tiểu hàm ε. Như vậy, a, b, c cần phải thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varepsilon}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - c - bx_i - ax_i^2\right) x_i^2 & = 0 \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial b} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - c - bx_i - ax_i^2\right) x_i & = 0 \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial c} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - c - bx_i - ax_i^2\right) & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4)a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3)b + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)c & = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3)a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)b + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)c & = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)b + nc & = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$



Hình 4.3: Xấp xỉ tuyến tính

Giải hệ phương trình trên ta sẽ tìm được a, b, c

Thí dụ 4.4. *Xây dựng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ xấp xỉ bảng dữ liệu sau:*

x	1	1	2	3	3	4	5
y	4.12	4.18	6.23	8.34	8.38	12.13	18.32

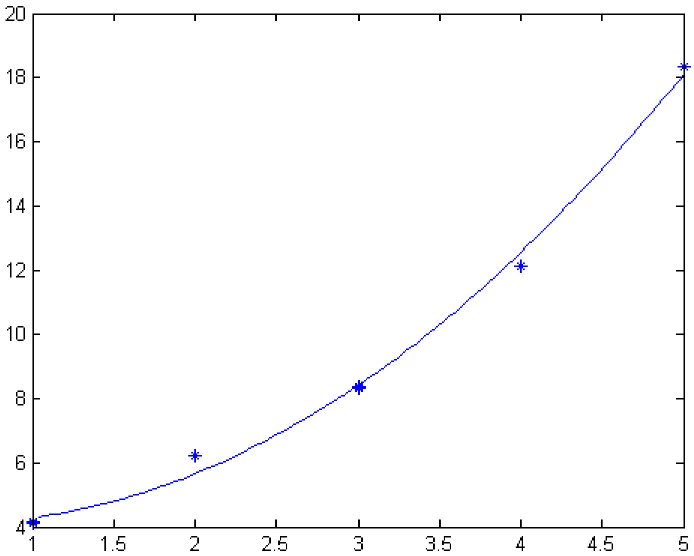
Theo phương pháp bình phương cực tiểu, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} x_i^4)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i^3)b + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)c & = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^3)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)b + (\sum_{i=1}^{n} x_i)c & = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b + nc & = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 65a + 19b + 7c & = 61.70 \\ 253a + 65b + 19c & = 211.04 \\ 1061a + 253b + 65c & = 835.78 \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được:

$a = 0.692883435582822, b = -0.706441717791411,\ c = 4.297852760736197$



Hình 4.4: Xấp xỉ hàm bậc hai

2.3 Trường hợp $y = a + b\cos x + c\sin x$

Sai số tại mỗi điểm $(x_i; y_i)$ là $\varepsilon_i = y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i$. Do vậy, tổng bình phương các sai số là $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i)^2$.

Chúng ta sẽ tìm a, b, c để cực tiểu hàm ε. Như vậy, a, b, c cần phải thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varepsilon}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i) & = 0 \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial b} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i)\cos x_i & = 0 \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial c} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i)\sin x_i & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} na + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos x_i\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin x_i\right)c & = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos x_i\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2 x_i\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos x_i\sin x_i\right)c & = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\cos x_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin x_i\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos x_i\sin x_i\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2 x_i\right)c & = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\sin x_i \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta sẽ tìm được a, b, c.

Thí dụ 4.5. *Dùng phương pháp bình phương bé nhất tìm hàm số* $y = a + b\cos x + c\sin x$ *xấp xỉ bảng dữ liệu sau:*

X	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*(rad)*
y	*1.45*	*1.12*	*0.83*	*1.26*	*1.14*	

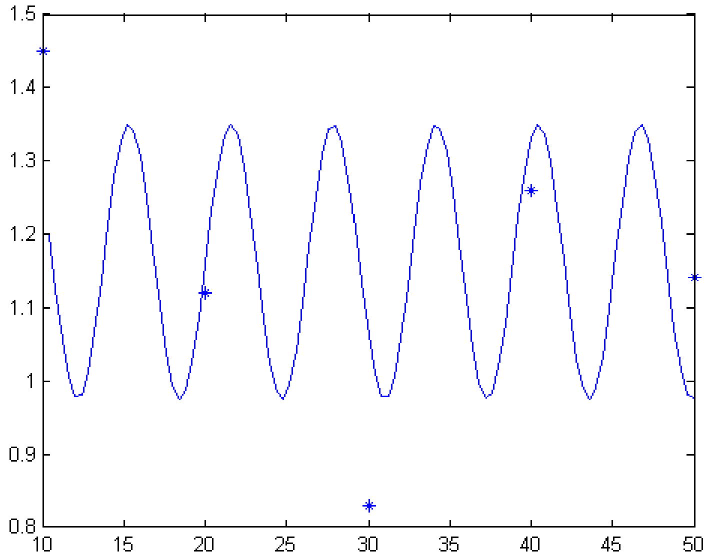
Ta có hệ sau:

$$\begin{cases} na + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos x_i\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin x_i\right)c & = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos x_i\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2 x_i\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos x_i \sin x_i\right)c & = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\cos x_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin x_i\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos x_i\sin x_i\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2 x_i\right)c & = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\sin x_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10a + b0.0425798989 - c0.2727383549 & = 11.6000000000 \\ a0.0425798989 + b4.5406626481 - c0.1470065049 & = -0.7437075794 \\ -a0.2727383549 - b0.1470065049 + c5.4593373518 & = 0.1066741420 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$a = 1.162724407414181, b = -0.172328749196102, c = 0.072986923388767$



Hình 4.5: Xấp xỉ hàm lượng giác

2.4 Trường hợp $y = af(x) + bg(x)$

Vì các cặp số $(x_i; y_i)$ trong bảng là do thực nghiệm mà có nên chúng hoàn toàn không xác định nghiệm đúng của phương trình $y = af(x) + bg(x)$. Sai số tại $(x_i; y_i)$ là

$$\varepsilon_i = y_i - af(x_i) - bg(x_i)$$

.
Ta có

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - af\left(x_i\right) - bg\left(x_i\right)\right)^2$$

là tổng bình phương các sai số.
Chúng ta sẽ tìm a, b để cực tiểu hàm ε. Như vậy, a, b cần phải thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - bg\left(x_i\right) - af\left(x_i\right)\right) f\left(x_i\right) = 0 \\ \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - bg\left(x_i\right) - af\left(x_i\right)\right) g\left(x_i\right) = 0 \end{cases}$$

hệ trên tương đương với

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f^2\left(x_i\right)\right) a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) g\left(x_i\right)\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) g\left(x_i\right)\right) a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} g^2\left(x_i\right)\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} g\left(x_i\right) y_i \end{cases}$$

3 Bài tập

4.1. *Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = f(x)$ cho bởi bảng sau*

1.

x	1	4	5	7
y	3	5	10	15

Tính $f(6)$.

2.

x	0	2	6	8
y	2	7	11	20

Tính $f(3)$

3.

x	0	1	2	3	4
y	1	5	10	16	20

Tính $f(3,5)$

4.

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8
y	2	5	7	11	16

Tính gần đúng $y(1,5)$

5.

x	-1	1	2	3	4	5
y	-2	3	8	15	20	30

Tính $f(5,5)$

6.

x	2,1	2,5	2,9	3,3	3,7	4
y	1	4	9	15	25	35

4.2. *Xây dựng đa thức nội suy Newton (đầu bảng và cuối bảng) của các hàm số cho bởi bảng:*

1.

x	0	2	4	6
y	1	8	12	16

   i) *Tính gần đúng* $y(3)$

   ii) *Thêm nút nội suy* $(8;18)$. *Xây dựng đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ* $(8;18)$. *Sử dụng đa thức vừa tìm, tính gần đúng* $y(7,75)$.

2.

x	1,0	1,3	1,6	1,9
y	2,2	8,1	12,2	17,4

   i) *Tính gần đúng* $f(1,4)$.

   ii) *Thêm nút nội suy* $(2,1;19,6);(2,3;21,7)$. *Xây dựng đa thức nội suy Newton lùi phát xuất từ* $(2,3;21,7)$ *rồi sử dụng đa thức vừa viết, tính gần đúng* $f(2,275)$. *Đánh giá sai số.*

3.

x	0	3	6	9	12
y	-1	2	8	17	42

   i) *Tính gần đúng* $y(12,5)$.

   ii) *Thêm mốc nội suy* $(15,45)$, *hãy xây dựng đa thức nội suy Newton lùi ,tính* $y(12,5)$. *So sánh với kết quả câu 1.*

4.3. *Tìm* a,b *để hàm số* $y = ax + b$ *là xấp xỉ tốt nhất của các bảng số liệu sau*

1.

x	1	2	3	6	7	10
y	0	1	2	4	8	12

2.

x	1	3	4	6	8	9	11
y	3	4	6	8	9	11	13

3.

x	1,1	3,2	5,2	6,3	7,2	8,4	9,4
y	2,1	4,1	6,4	8,3	9,5	11,5	13,5

4.4. *Cho biết hai đại lượng x và y có quan hệ* $y = ae^{bx}$ *và bảng số liệu thực nghiệm sau:*

x	1	2	3	6	7	10
y	2,1	4,8	21,1	112,1	400,1	1000,12

Xác định a,b *từ đó hãy tính* $y(9,2)$. *Nếu thay bằng quan hệ* $y = ae^{bx^2}$ *thì* a,b *được xác định như thế nào ?*

4.5. *Cho biết hai đại lượng x và y có quan hệ* $y = ax^b$ *và bảng số liệu thực nghiệm sau:*

x	3,1	3,5	3,6	3,7	3,8	4,0
y	9,1	12,4	17,3	21,1	25,1	32,6

   i) *Xác định* a,b *từ đó hãy tính* $y(3,92)$.

ii) Nếu thay bằng quan hê $y = a\left(x^2+1\right)^b$ *thì* a, b *được xác định như thế nào?*

4.6. *Cho biết hai đại lượng* x *và* y *có quan hệ* $y = ax^2 + bx + c$ *và bảng số liệu thực nghiệm sau:*

x	1	2	3	6	7	8
y	2,9	1,2	0,145	7,3	16,1	19,1

Xác định a, b, c *từ đó hãy tính* $y\,(7,2)$.

4.7. *Cho biết hai đại lượng* x *và* y *có quan hệ* $y = a + b\cos x + c\sin x$ *và bảng số liệu thực nghiệm sau:*

x	0	1	2	4	5	6
y	0	1,1	1,145	-1,3	1,01	3,1

Xác định a, b, c *bằng phương pháp bình phương bé nhất, từ đó hãy tính* $y\,(5,5)$.

4.8. *Cho biết hai đại lượng* x *và* y *có quan hệ* $y = a\ln(x+1) + b\sin x$ *và bảng số liệu thực nghiệm sau:*

x	0	1	2	4	5	6
y	0	1,1	1,145	-1,3	1,01	3,1

Xác định a, b *bằng phương pháp bình phương bé nhất, từ đó hãy tính* $y\,(4,5)$.

4.9. *Cho biết hai đại lượng* x *và* y *có quan hệ* $y = a\ln\left(x^2+1\right) + b\left(e^{2x}-1\right)$ *và bảng số liệu thực nghiệm sau:*

x	0	1	2	4	5	6
y	0	1,1	1,145	-1,3	1,01	3,1

Xác định a, b *bằng phương pháp bình phương bé nhất, từ đó hãy tính* $y\,(4,5)$

4.10. *Hãy xây dựng hệ phương trình mà từ đó xác định được các hệ số* a, b, c *để hàm số* $y = af(x) + bg(x) + c$ *là xấp xỉ tốt nhất bảng số liệu đã cho.*

Áp dụng: Cho biết hai đại lượng x *và* y *có quan hệ* $y = a\left(x^2-4\right) + b(x-2) + c$ *và bảng số liệu thực nghiệm sau:*

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	12	20	32	40

Xác định a, b, c *bằng phương pháp bình phương bé nhất, từ đó hãy tính* $y\,(4,5)$

4.11. *Cho biết hai đại lượng* x *và* y *có quan hệ* $y = \sqrt{a + (xe^x)\,b + (xe^x)^2 c}$ *và bảng số liệu thực nghiệm sau:*

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	12	20	32	40

Xác định a, b, c *bằng phương pháp bình phương bé nhất, từ đó hãy tính* $y\,(4,5)$

4.12. *Cho biết hai đại lượng* x *và* y *có quan hệ* $y = \sqrt{a + (x\cos x)\,b + (x\cos x)^2 c}$ *và bảng số liệu thực nghiệm sau:*

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	12	20	32	40

Xác định a, b, c *bằng phương pháp bình phương bé nhất, từ đó hãy tính* $y\,(4,5)$.

Chương 5

CÔNG THỨC TÍCH PHÂN SỐ

1 Tính gần đúng đạo hàm

Cho hàm số $f(x)$ và bảng dữ liệu

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Để tính gần đúng đạo hàm, ta xấp xỉ hàm số bằng đa thức nội suy Lagrange $L_n(x)$. Khi đó

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx L_n'(x) \\ f''(x) &\approx L_n''(x) \end{aligned}$$

■Trường hợp có bảng chỉ có hai điểm nút:
$h = x_1 - x_0; y = f(x_0); y = f(x_0 + h)$.
Đa thức nội suy Lagrange

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \tfrac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} y_0 + \tfrac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} y_1 \\ &= \tfrac{(x-x_0)}{h} y_1 - \tfrac{(x-x_1)}{h} y_0 \end{aligned}$$

Do đó, với mọi $x \in [x_0, x_1]$, ta có:

$$f'(x) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Công thức sai phân tiến

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Công thức sai phân lùi

$$f'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$$

Công thức sai số

$$\Delta = \frac{M_2 h}{2} \qquad \text{với } M_2 = \max_{x\in[x_0,x_1]} |f''(x)|$$

Thí dụ 5.1. *Cho hàm số $f(x) = ln(x)$. Tính xấp xỉ $f'(1,8)$ và sai số với cỡ bước $h = 0,1; 0,01; 0,001$.*
Ta có $f'(1.8) \approx \frac{f(1.8+h)-f(1.8)}{h}$;
$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow M_2 = \max |f(x)| = \frac{1}{1.8^2}$
Sai số $\Delta = \frac{h}{2(1,8)^2}$

$f(x)$	$f'(1,8)$	Δ
0.1	$0,540672212$	$0,016$
0.01	$0,554018037$	0.16×10^{-2}
0.001	$0,555401292$	$0,16 \times 10^{-3}$

■Trường hợp có 3 nút nội suy
$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0; y_0 = f(x_0); y_1 = f(x_1) = f(x_0+h); y_2 = f(x_2) = f(x_0+2h)$
Đa thức nội suy Lagrange

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \tfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \tfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 \\ &= \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} y_2 - \tfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2} y_1 + \tfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} y_0 \end{aligned}$$

Do đó với mọi $x \in [x_0, x_2]$, ta có:

$$f'(x) \approx \frac{(x-x_0)}{2h^2}(y_2 - 2y_1) + \frac{(x-x_1)}{2h^2}(y_2 + y_0) + \frac{(x-x_2)}{2h^2}(y_0 - 2y_1)$$

$$f(x) \approx \frac{(y_2 - 2y_1 + y_0)}{h^2}$$

Suy ra đạo hàm cấp 1:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \tfrac{(-3y_0+4y_1-y_2)}{2h} \\ f'(x_1) &\approx \tfrac{(y_2-y_0)}{2h} \\ f'(x_2) &\approx \tfrac{(y_0-4y_1+3y_2)}{2h} \end{aligned}$$

Lần lượt ta có công thức sai phân tiến

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}$$

Công thức sai phân hướng tâm

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Công thức sai phân lùi

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)}{2h}$$

Với sai số

$$\Delta = \frac{M_3 h^2}{6} \text{ với } M_3 = \max_{x\in[x_0,x_2]} |f'(x)|$$

Thí dụ 5.2. *Cho hàm số $f(x) = lnx - \frac{2}{x^3}$. Tính xấp xỉ $f'(3); f''(3)$ và với $h = 0,1; 0.01; 0.001$.*
Ta có $f'(3) \approx \frac{f(3+h)-f(3-h)}{2h}$; $f''(3) \approx \frac{f(3+h)-2f(3)+f(3-h)}{h^2}$.

h	f'	$f''(3)$
0.1	0.407805936	−0.210213236
0.01	0.407411385	−0.20987991
0.001	0.407407442	−0.2098756

2 Tính gần đúng tích phân

Trong một số bài toán, ta sử dụng trực tiếp công thức Newton-Leibnitz gặp nhiều trở ngại, thậm chí một số hàm không tìm được nguyên hàm, do vậy việc tính gần đúng với sai số cho phép được áp dụng là một điều tất yếu.

2.1 Mở đầu

Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả tích trên $[a, b]$, ta tính gần đúng tích phân:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau với cỡ bước $h = \frac{b-a}{n}$ bởi các điểm chia $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, ..., x_k = x_0 + kh, ..., x_n = b$. Đặt $y_k = f(x_k), k = \overline{0, n}$.
Xấp xỉ $f(x)$ bằng đa thức nội suy Lagrange

$$I \approx I^* = (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_k y_k \tag{5.1}$$

.
Với

$$H_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n\ k!(n-k)!} \int_0^n \frac{q(q-1)...(q-n)}{(q-k)} dq$$

Công thức trên gọi là công thức Newton-Cotes, với H_k gọi là các hệ số Cotes. Hệ số Cotes có các tính chất sau:

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} H_k = 1$

2. $H_{n-k} = H_k; \quad k = \overline{0, n}$

Công thức sai số

$$\Delta = |I - I^*| \leq \begin{cases} \frac{M_{n+1}h^{n+2}}{(n+1)!} \int\limits_0^n |q(q-1)...(q-n)|dq & \text{với n lẻ} \\ \frac{M_{n+2}h^{n+3}}{(n+2)!} \int\limits_0^n |q^2(q-1)...(q-n)|dq & \text{với n chẵn} \end{cases} \tag{5.2}$$

$M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ và $M_{n+2} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+2)}(x)|$

2.2 Công thức hình thang

Với $n = 1$, ta có $h = b - a$. Áp dụng công thức (5.1), ta có:

$I \approx (b-a)(H_0y_0 + H_1y_1$ với $H_0 = -\int\limits_0^1 (q-1)dq = \frac{1}{2} \Rightarrow H_1 = H_0 = \frac{1}{2}$.

Vậy

$$I \approx \frac{(b-a)}{2}(y_0 + y_1) = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$$

Công thức sai số được xác địnhh dựa vào (5.2):

$$\Delta \leq \frac{M_2h^3}{2!}\int\limits_0^1 |q(q-1)|dq = \frac{M_2h^3}{12}$$

Tổng quát, ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn đều nhau, khi đó:

$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$

$= \frac{(x_1-x_0)}{2}(y_0 + y_1) + \frac{(x_2-x_1)}{2}(y_1 + y_2) + ... + \frac{(x_n-x_{n-1})}{2}(y_{n-1} + y_n)$

$= \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + ... + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$.

Vậy

$$I \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + ... + 2y_{n-1} + y_n)$$

Khi đó, sai số

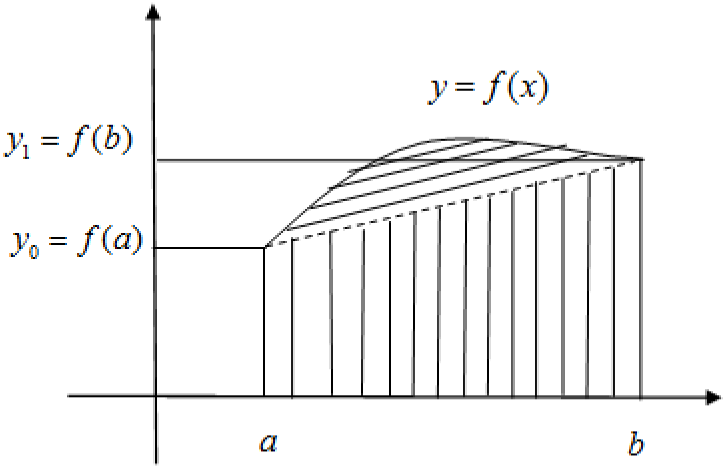
$$\Delta \leq n\frac{M_2h^3}{12} = (b-a)\frac{M_2h^2}{12}$$

2.3 Công thức Simpson

■ Công thức Simpson 1/3

Với $n = 2$, ta có $h = \frac{(b-a)}{2}$, khi đó

$$I \approx (b-a)(H_0y_0 + H_1y_1 + H_2y_2)$$



Hình 5.1: Ý nghĩa hình học công thức hình thang

với $H_0 = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 (q-1)(q-2)dq = \frac{1}{6} = H_2$
$H_0 + H_1 + H_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{2}{3}$.
Vậy

$$I \approx \frac{(b-a)}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) = h\frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

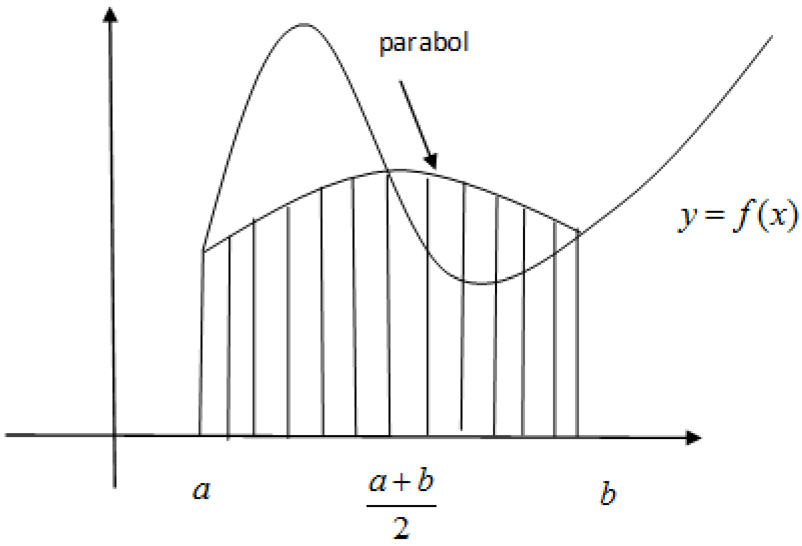
Công thức sai số

$$\Delta \leq \frac{M_4 h^4}{4!}\int\limits_0^1 |q^2(q-1)(q-2)|dq = \frac{M_4 h^5}{90}$$

Tổng quát: chia $[a, b]$ thành $n = 2k$ đoạn đều nhau, ta được:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \frac{1}{3}h\sum_{i=1}^{k}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

■ Công thức Simpson 3/8
Trường hợp $n = 3$, ta có $h = \frac{b-a}{3}$. Khi đó:



Hình 5.2: Ý nghĩa hình học công thức Simpson 1/3

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left(H_0y_0 + H_1y_1 + H_2y_2 + H_3y_3\right)$$

Với $H_0 = H_3 = \int\limits_0^1 (q-1)(q-2)(q-3)dq = \frac{1}{8}$
$H_0 + H_1 + H_2 + H_3 = 1,$ kết hợp với $H_1 = H_2 \Rightarrow H_1 = H_2 = \frac{3}{8}$. Vậy

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right)$$

Công thức sai số:

$$|I - I^*| \leq \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi), \xi \in [x_0, x_3]$$

Tổng quát, chia đoạn $[a, b]$ thành $n = 3k$ đoạn đều nhau, ta được:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{3(i-1)}}^{x_{3(i+1)}} f(x)dx = \frac{3}{8}h\sum_{i=1}^{k}\left(y_{3i-3} + 3y_{3i-2} + 3y_{3i-1} + y_{3i-0}\right)$$

3 Bài tập

5.1. *Tính gần đúng các tích phân sau bằng công thức hình thang suy rộng (không đánh giá sai số)*

1. $\int\limits_{0,2}^{1,2} \frac{\ln\left(x^2+5\right)+x^3}{x\ln(2x+1)}dx$ *với* $n = 8$

2. $\int\limits_{0,4}^{1,4} \frac{x^4-x+1}{\sqrt{x^2+4}+5}dx$ *với* $n = 10$

3. $\int\limits_{0,4}^{2} \left(x\ln(x+2) + \frac{1}{x^3+1}\right)dx$ *với* $n = 8$

4. $\int\limits_{1,3}^{2,3} \left(\sqrt{x^2+2} + \frac{x}{\ln(x+1)}\right)dx$ *với* $n = 10$

5. $\int\limits_{1,4}^{2,2} e^{x^2-2x+3}dx$ *với* $n = 8$

6. $\int\limits_{1}^{2} x^{x^2}dx$ *với* $n = 10$

5.2. *Tính gần đúng các tích phân sau bằng công thức hình thang suy rộng (có đánh giá sai số)*

1. $\int\limits_{0}^{1} x^4dx$ *với* $n = 10$

2. $\int\limits_{2,1}^{3,1} \frac{x^3}{x-1}dx$ *với* $n = 8$

3. $\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}dx$ *với* $n = 10$

4. $\int\limits_{1}^{3} \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$ *với* $n = 10$

5. $\int\limits_{1}^{4} 2^{\sqrt{x}}dx$ *với* $n = 10$

6. $\int\limits_{3}^{4} \frac{(x+1)^6-x(x-1)}{(x+1)^4}dx$ *với* $n = 10$

7. $\int\limits_1^2 \frac{\sin 2x}{x} dx$ *với* $n = 8$

8. $\int\limits_2^{2,5} \frac{3x+1}{x+3} dx$ *với* $n = 10$

5.3. *Tính các tích phân sau bằng công thức Simpson một phần ba (không đánh giá sai số)*

1. $\int\limits_{0,2}^{1,2} \frac{\sin\left(x^2+5\right)+x^2}{x(x^2+3)} dx$ *với* $n = 8$

2. $\int\limits_{0,4}^{1,4} \frac{\tan(3x)+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^3+4}} dx$ *với* $n = 10$

3. $\int\limits_{0,4}^{2,4} \left(xe^{x^3} + \frac{x}{x^3+1} \right) dx$ *với* $n = 8$

4. $\int\limits_{1,3}^{2,3} \left(x^{3x} + \frac{x^2-2,3}{\ln(x+1)} \right) dx$ *với* $n = 10$

5. $\int\limits_{1,4}^{2,2} \frac{x\sin(5x)+x^2}{x^3+x} dx$ *với* $n = 8$

6. $\int\limits_1^2 (2x)^{\sin(x)} dx$ *với* $n = 10$

5.4. *Tính gần đúng các tích phân sau bằng công thức Simpson một phần ba (có đánh giá sai số)*

1. $\int\limits_0^1 e^{x^2+4} dx$ *với* $n = 10.$

2. $\int\limits_0^1 e^{\frac{x^4}{2}} dx$ *với* $n = 10.$

3. $\int\limits_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx$ *với* $n = 10$

4. $\int\limits_1^4 \ln x dx$ *với* $n = 10$

5. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x+1} dx$ *với* $n = 12$

6. $\int\limits_1^e x^4 \ln x dx$ *với* $n = 10$

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ *với* $n = 10$.

8. $\int\limits_{1,4}^{2,4} \frac{x^4}{x+1} dx$ *với* $n = 10$

5.5. *Tính gần đúng các tích phân sau bằng công thức Simpson ba phần tám (có đánh giá sai số)*

1. $\int\limits_0^{1,8} e^x dx$ *với* $n = 9$.

2. $\int\limits_0^{0,9} e^{x^3} dx$ *với* $n = 9$.

3. $\int\limits_1^{4,5} \frac{x^2}{x+1} dx$ *với* $n = 9$

4. $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$ *với* $n = 9$

5. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x-1} dx$ *với* $n = 9$

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ *với* $n = 9$.

5.6. *Xét tích phân* $I = \int\limits_1^2 \frac{4x^2+1}{2x+1} dx$

i) Tính tích phân I *bằng công thức hình thang với* $n = 10$ *và đánh giá sai số kết quả trên.*

ii) Phải chia $[1; 2]$ *thành bao nhiêu đoạn bằng nhau để khi áp dụng công thức hình thang trên số đoạn đó thì sai số không quá* 10^{-5}.

5.7. *Xét tích phân* $I = \int\limits_2^3 \frac{x^3+x}{x-1} dx$

i) Tính tích phân I *bằng công thức Simpson một phần ba với* $n = 10$ *và đánh giá sai số kết quả trên.*

ii) Phải chia $[2; 3]$ *thành bao nhiêu đoạn bằng nhau để khi áp dụng công thức Simpson một phần ba trên số đoạn đó thì sai số không quá* 10^{-4}.

5.8. *Xét tích phân* $I = \int\limits_{2,2}^{3,4} \frac{x^4-x}{x+1}dx$

i) Tính tích phân I bằng công thức Simpson ba phần tám với $n = 12$ *và đánh giá sai số kết quả trên.*

ii) Phải chia $[2,2;3,4]$ *thành bao nhiêu đoạn bằng nhau để khi áp dụng công thức Simpson một phần ba trên số đoạn đó thì sai số không quá* 10^{-10}.

5.9. *Cho hàm số* $f(x) = e^{x+1}\sin(x+1)$

i) Sử dụng đa thức nội suy Newton tiến $p_2(x)$ *xấp xỉ hàm số trên tại các mốc nội suy:* $\{0; 0.1; 0.2\}$.

ii) Sử dụng đa thức vừa tìm ở câu i). Tính gần đúng $f(0.05)$. *Đánh giá sai số.*

iii) Sử dụng đa thức vừa tìm ở câu i), tính $\int\limits_0^{0.2} p_2(x)dx$. *Đánh giá sai số.*

5.10. *Cho hàm số:* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

i) Sử dụng đa thức nội suy Lagrange xấp xỉ hàm số trên tại các mốc nội suy $\{0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$. *Sau đó tính gần đúng* $f(0.075)$, *đánh giá sai số.*

ii) Sử dụng đa thức nội suy Newton tiến, xấp xỉ hàm số trên tại các mốc nội suy $\{0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$. *Sau đó tính gần đúng* $f(0.075)$, *đánh giá sai số. Nhận xét kết quả so với câu i).*

iii) Sử dụng kết quả câu i) ,ii) tính gần đúng $\int\limits_0^{0.8} f(x)dx$. *Đánh giá sai số.*

5.11. *Cho hàm số* $f(x) = 2e^{x^2+\sin(2\ln x+x^2)}\left[x + \cos(2\ln x + x^2)\frac{1+x^2}{x}\right]$

i) Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến sử dụng mốc nội suy tại $x_0 = 1; x_1 = 1.1; x_2 = 1.2; x_3 = 1.3$. *Tính* $f(1.25)$. *Đánh giá sai số.*

ii) Sử dụng đa thức vừa tìm, tính xấp xỉ $\int\limits_1^{1.3} f(x)dx$. *Đánh giá sai số.*

Chương 6

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

1 Một số khái niệm

Xét bài toán Cauchy: tìm nghiệm $y = f(x)$ của phương trình vi phân với giá trị ban đầu $y_0 = f(x_0)$

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & \forall x \in [a, b] \\ y(a) = y_0, \end{cases} \tag{6.1}$$

Ở đây, tất cả những điều kiện về tồn tại và duy nhất nghiệm coi như được thỏa mãn, ta chỉ khảo sát vấn đề tìm nghiệm gần đúng so với nghiệm giải tích $y = f(x)$.
Để tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán (6.1), ta chia $[a, b]$ thành n đoạn con đều nhau bởi các điểm chia $x_0 = a < x_1 = x_0 + h < \cdots < x_i = x_0 + ih < \cdots < x_n = b, h = \frac{b-a}{n}$.
Khi đó nghiệm gần đúng của bài toán là dãy y_i gồm các giá trị của hàm $f(x)$(nghiệm đúng) tại $x = x_i$.
Ta có $y_i \approx y(x_i)$.

2 Phương pháp Euler

2.1 Phương pháp Euler

Khi triển Taylor của hàm y thành đa thức bậc hai, ta có:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i)y'(x_i) + (x_{i+1} - x_i)^2 \frac{y''(\xi_i)}{2}, \qquad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Kết hợp với đề bài $y'(x_k) = f(x_k, y_k)$, ta có công thức lặp như sau:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1} \tag{6.2}$$

Người ta đã chứng minh được sai số của phương pháp Euler tại x_i là:

$$|y_i - y(x_i)| \le Mh \tag{6.3}$$

với M là hằng số không phụ thuộc h.

Thí dụ 6.1. *Giải bài toán Cauchy sau:*

$$\begin{cases} y^{/} &= y - \frac{2x}{y} \\ y(0) &= 1; (0 \le x \le 1), n = 5. \end{cases}$$

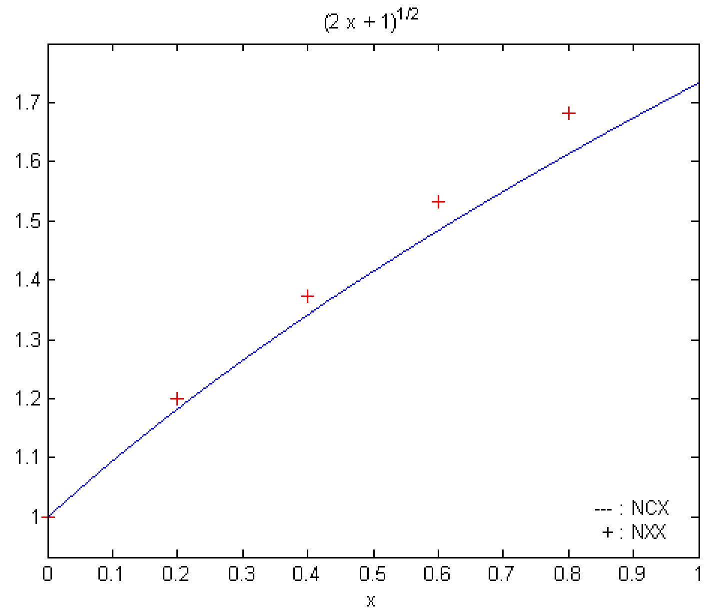
Cỡ bước $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$. *Công thức lặp:*

$$\begin{cases} y_0 = 0.5; x_0 = 1 \\ y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + 0.2\left(y_k - \frac{2x_k}{y_k}\right) \end{cases} ; k = \overline{0,4}$$

Ta có bảng kết quả sau:

k	y_n	$y(x_i)$	$\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
0	1.000000000000000	1.000000000000000	0
1	1.200000000000000	1.183215956619923	0.016784043380077
2	1.373333333333333	1.341640786499874	0.031692546833459
3	1.531495145631068	1.483239697419133	0.048255448211935
4	1.681084569320625	1.612451549659710	0.068633019660915
5	1.826948180418238	1.732050807568877	0.094897372849361

Đồ thị biểu diễn nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác như hình 6.1.



Hình 6.1: Phương pháp Euler

Thí dụ 6.2. *Giải bài toán Cauchy sau:*

$$\begin{cases} y^{/} &= \sin x + \cos y \\ y(2.5) &= 0; (2.5 \le x \le 3) \end{cases}$$

Ta có $h = \frac{3-2.5}{0.05} = 10, f(x,y) = \sin x + \cos y$.
Chia đoạn $[2.5, 3]$ *thành 10 đoạn đều nhau bởi các điểm* $x_0 = 2.5 < x_1 = 2.55 < \ldots < x_{10} = 3$, *ta có công thức lặp :*
$$\begin{cases} y_0 &= 0 \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$$
Bảng kết quả sau:
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.2 Phương pháp Euler cải tiến

Để tăng độ chính xác của phương pháp Euler, từ (6.1), áp dụng công thức Newton-Leibnitz, ta có:

$$y(y_{i+1}) - y(x_i) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx \tag{6.4}$$

Tính gần đúng tích phân vế phải bằng công thức hình thang, ta được:

$$y(y_{i+1}) - y(x_i) = \frac{h}{2}\left[y'(x_i) + y'(x_{i+1})\right] - \frac{h^3}{12}y'''(\xi_i), \xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \tag{6.5}$$

Trong(6.2), bỏ qua số hạng cuối, tiến hành thay thế tương ứng, ta nhận được hệ thức:

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right], i = \overline{0, n}$$

hay

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right], i = \overline{0, n} \tag{6.6}$$

Đây là phương trình ẩn, vì y_{i+1} có mặt ở cả hai vế. Người ta chứng minh được rằng sai số của (6.6) tại x_i là :

$$|y_{i+1} - y_i| \leq Mh^2 \tag{6.7}$$

trong đó, M là hằng số độc lập với h.
Công thức (6.6) có độ chính xác tốt hơn so với công thức (6.2), tuy nhiên để xác

định y_{i+1} khi đã biết y_i, ta phải giải phương trình đại số (6.5). Để khắc phục nhược điểm này, người ta kết hợp cả hai phương pháp như sau:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{i+1}^{(m)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(m-1)})\right] \end{cases} \tag{6.8}$$

$i = \overline{0, n-1}, = 1, 2, ...$

Công thức (6.8) được gọi là công thức Euler cải tiến. Quá trình lặp chỉ dừng lại khi sai số của hai lần lặp liên tiếp thỏa sai số cho trước hoặc đến số lần m mà đề bài yêu cầu.

Thí dụ 6.3. *Giải bài toán Cauchy sau:*

$$\begin{cases} y' &= y - \frac{2x}{y} \\ y(0) &= 1; (0 \le x \le 1), n = 5. \end{cases} \quad \textit{sau hai lần lặp}$$

Cỡ bước $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$. *Công thức lặp:*

$$\begin{cases} y_0 = 0.5; x_0 = 1 \\ y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + 0.2\left(y_k - \frac{2x_k}{y_k}\right) \\ y_{k+1}^{(1)} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)}\right)\right] = y_k + 0.1\left(y_k - \frac{2x_k}{y_k} + y_{k+1}^{(0)} - \frac{2x_{k+1}}{y_{k+1}^{(0)}}\right) \\ y_{k+1}^{(2)} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(1)}\right)\right] = y_k + 0.1\left(y_k - \frac{2x_k}{y_k} + y_{k+1}^{(1)} - \frac{2x_{k+1}}{y_{k+1}^{(1)}}\right) \end{cases};$$

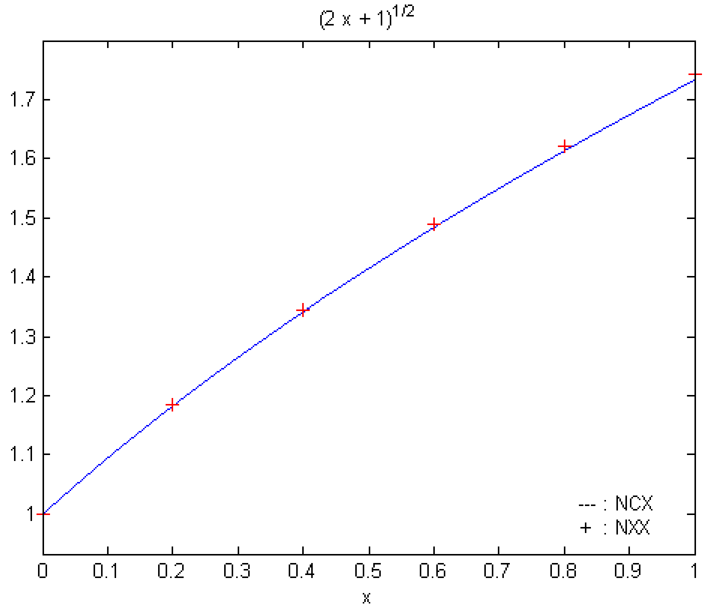
Với $k = \overline{0, 4}$. *Ta có bảng kết quả sau:*

k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y_k - y(x_k)\rvert$
0	1.000000000000000	1.000000000000000	0
1	1.184958801498127	1.183215956619923	0.001742844878204
2	1.344873954878681	1.341640786499874	0.003233168378807
3	1.488199090203419	1.483239697419133	0.004959392784286
4	1.619676180371466	1.612451549659710	0.007224630711756
5	1.742400309320333	1.732050807568877	0.010349501751456

Đồ thị biểu diễn nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác như hình 6.2

Thí dụ 6.4. *Giải bài toán sau* $\begin{cases} y' &= y - x^2 + 1, 0 \le x \le 1 \\ y(0) &= 0,5 \end{cases}$ *với* $n = 5$. *Biết nghiệm chính xác* $y(x) = (x+1)^2 - 0,5e^x$.

....
....
....
....
....
....
....
....



Hình 6.2: Euler cải tiến

....
....
....
....
....
....
....
....

3 Phương pháp Runge-Kutta

Phương pháp Runge-Kutta là một phương pháp có độ chính xác cao hơn so với phương pháp Euler. Ý tưởng cơ bản là dùng khai triển Taylor nghiệm $y(x)$ của phương trình (6.1) nhưng số hạng trong khai triển nhiều hơn. Sau đây, ta chỉ khảo sát những trường hợp đơn giản nhất của phương pháp.

3.1 Phương pháp Runge-Kutta cấp 2

Giả sử ta biết nghiệm gần đúng ở bước thứ i là y_i. Ta cần tính giá trị gần đúng tại $x = x_{i+1}$. Ta khai triển nghiệm $y(x)$ của bài toán (6.1) tại x_i

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)y'(x_i) + (x - x_i)^2\frac{y''(x_i)}{2!} + (x - x_i)^3\frac{y'''(\xi_i)}{3!}, \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Trong đẳng thức trên, thay $x = x_{i+1} = x_i + h$, ta có:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy^{/}(x_i) + h^2\frac{y''(x_i)}{2!} + h^3\frac{y'''(\xi_i)}{3!}, \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

với:

$$\begin{cases} y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) \\ y''(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=x_i} = f'_x(x_i, y(x_i)) + f'_y(x_i, y(x_i))y'(x_i) \end{cases}$$

Thay xấp xỉ $y(x_i), y(x_{i+1})$ tương ứng bởi y_i, y_{i+1};
$y'(x_i), y''(x_i)$ bởi $f(x_i, y_i), f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)y'$, ta được xấp xỉ sau:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}\left[f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)y'_i\right] + O(h^3) \qquad (6.9)$$

Để tránh tính trực tiếp $f'_x(x, y); f'_y(x, y)$ Runge và Kutta đã xét hệ thức:

$$y_{i+1} = y_i + r_1k_1^{(i)} + r_2k_2^{(i)} = y_i + r_1hf(x_i, y_i) + r_2hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1^{(i)}) \qquad (6.10)$$

Trong đó:

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1^{(i)}) \end{cases} \qquad (6.11)$$

Ta sẽ chọn α, β, r_1, r_2 sao cho khai triển theo lũy thừa h của y_{i+1} xác định bởi (6.11) trùng nhau đến 3 số hạng đầu của (6.10).
Mặt khác, theo công thức khai triển Taylor của hàm hai biến, ta có:
$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) = hy'_1$
$k_2^{(i)} = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1^{(i)})$
$= h\left[f(x_i, y_i) + \alpha hf'_x(x_i, y_i) + \beta k_1^{(i)}f'_y(x_i, y_i) + O(h^2)\right]$
$= hf(x_i, y_i) + \alpha h^2f'_x(x_i, y_i) + \beta h^2y'_if'_y(x_i, y_i) + O(h^3)$
Do vậy (6.10) được viết lại dưới dạng:

$$y_{i+1} = y_i + r_1hy'_i + r_2hy'_i + r_2h^2\left[\alpha f'_x(x_i, y_i) + \beta y'_if'_y(x_i, y_i)\right] + O(h^3) \qquad (6.12)$$

So sánh những hệ số lũy thừa của h trong (6.9) và (6.12), ta có:

$$r_1 + r_2 = 1; \alpha r_2 = \frac{1}{2}; \beta r_2 = \frac{1}{2}$$

Đây là hệ có vô số nghiệm, ta chỉ xét những họ nghiệm đơn giản:

i) Nếu lấy $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, r_2 = 1, r_1 = 0$. Khi đó, từ (6.10) và (6.11) có dạng (cấp 2):

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + k_2^{(i)} \\ k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), i = \overline{0, n-1} \end{cases} \qquad (6.13)$$

ii) Nếu lấy $\alpha = \beta = 1, r_2 = r_1 = \frac{1}{2}$. Khi đó, từ (6.10) và (6.11) có dạng (cấp 2):

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\left(k_1^{(i)} + k_2^{(i)}\right) \\ k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{i} = hf(x_i + h, y_i + h), i = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{6.14}$$

Chú thích 10. *Hai dạng trên có cùng cấp, nhưng công thức khác nhau do chúng ta sử dụng các dạng xấp xỉ khác nhau.*

Thí dụ 6.5. *Cho* $\begin{cases} y' &= 2,7xy + \cos(x + 2,7y); 1,2 \leq x \\ y(1,2) &= 5,4 \end{cases}$. *Tìm* $y(1,5)$ *với* $h = 0,3$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Chú thích 11. *Trong khai triển Taylor nghiệm* $y(x)$ *của bài toán* (6.1) *tại* $x = x_i$, *ta bỏ qua số hạng* $O(h^3)$ *khi thành lập công thức* (6.13), (6.14) *và người ta chứng minh được sai số tại* $x = x_i$ *là:*

$$|y_i - y(x_i)| \leq Mh^2$$

Trong đó M *là hằng số không phụ thuộc* h.

3.2 Phương pháp Runge-Kutta cấp cao

Hoàn toàn tương tự, nếu trong khai triển Taylor của nghiệm $y(x)$ của bài toán (6.1) tại x_i ,ta bỏ qua số hạng $O(h^4)$ thì sẽ nhận được công thức Runge-Kutta có độ chính xác cao hơn, với sai số $|y_i - y(x_i)| \leq Mh^3$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 4k_2^{(i)} + k_3^{(i)}\right) \\ k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} = hf(x_i + h, y_i - k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)}), i = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{6.15}$$

$|y_i - y(x_i)| \le Mh^4$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right) \\ k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \\ k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}), i = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{6.16}$$

Chú thích 12. *Trong các công thức Runge-Kutta nêu trên, người ta thường sử dụng công thức (6.16) độ chính xác cao và công thức đơn giản.*

Chú thích 13. *Trong thực hành, người ta thường tính toán sai số bằng cách tính hai lần: lần đầu tính bằng công thức (6.16) với cỡ bước h nhận được giá trị gần đúng* $y_n(h)$ *của* $y(x^*)$*, lần hai tính tương tự với cỡ bước* $\frac{h}{2}$*, nhận được nghiệm xấp xỉ* $y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$*. Khi đó, sai số được xác định bởi :*

$$\left|y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - y\left(x^*\right)\right| \approx \frac{1}{15}\left|y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - y_n(h)\right| \tag{6.17}$$

Thí dụ 6.6. *Giải bài toán Cauchy sau:*

$$\begin{cases} y' &= y - \frac{2x}{y} \\ y(0) &= 1; (0 \le x \le 1), n = 5. \end{cases}$$

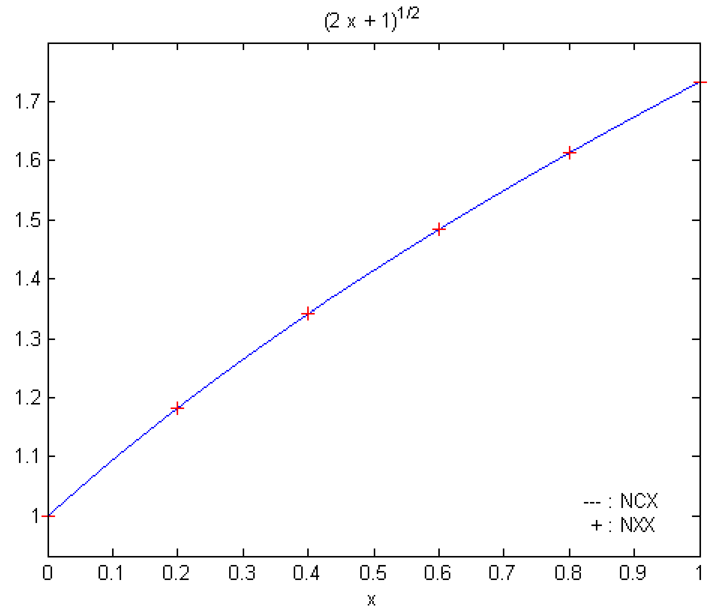
Cỡ bước $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$*. Áp dụng công thức* (6.16)*, ta có bảng kết quả sau:*

k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y_k - y(x_k)\rvert$
			$1.0e-04*$
0	1.000000000000000	1.000000000000000	0
1	1.183229287445307	1.183215956619923	0.133308253837949
2	1.341666929852607	1.341640786499874	0.261433527326549
3	1.483281458350262	1.483239697419133	0.417609311289535
4	1.612514041677527	1.612451549659710	0.624920178167176
5	1.732141882691193	1.732050807568877	0.910751223159867

Đồ thị biểu diễn nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác như hình 6.3.

Thí dụ 6.7. *Giải phương trình* $x^2y' - xy = 1$*,với điều kiện ban đầu* $y(1) = 0, x \in [1, 2]$ *sử dụng công thức Runge-Kutta bậc 4 với cỡ bước* $h = 0,2$*. Đánh giá sai số biết nghiệm đúng* $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$*.*

....
....
....
....
....
....
....
....
....



Hình 6.3: Runge-Kutta

....
....
....
....
....
....
....

4 Bài tập

6.1. *Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp Euler cải tiến*

1. $\begin{cases} y' & = x + y \\ y(0) & = 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 0,5]$, *trong đó bước* $h = 0,25$ *và sai số không quá* 10^{-5}.

2. $\begin{cases} y' = & \sqrt{x^2 + xy + 1} + y \\ y(0) & = 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 0,4]$, *trong đó bước* $h = 0,2$ *và sai số không quá* 10^{-5}.

3. $\begin{cases} y' & = x \ln\left(2x^2 + y^2 + 1\right) \\ y(0,5) & = 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0,5; 0,9]$, *trong đó bước* $h = 0,2$ *và sai số không quá* 10^{-5}.

4. $\begin{cases} y' &= \frac{x^2-2y}{xy+1} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 0,2]$, *trong đó bước* $h = 0,1$ *và sai số không quá* 10^{-5}.

5. $\begin{cases} y' &= xy\cos\left(x^2+y^2\right) \\ y(0,1) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0,1; 0,3]$, *trong đó bước* $h = 0,1$ *và sai số không quá* 10^{-5}.

6. $\begin{cases} y' &= \frac{x+1}{y^2} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 1]$, *trong đó bước* $h = 0,5$ *với sai số không quá* 10^{-5}.

6.2. *Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp Runge – Kutta bậc bốn*

1. $\begin{cases} y' &= 2x + \frac{y}{5} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 0,5]$ *và* $h = 0,25$

2. $\begin{cases} y' &= \frac{x+y^2}{\ln(2x+1)} \\ y(0,3) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0,3; 0,9]$ *và* $h = 0,3$

3. $\begin{cases} y' &= \frac{x^4+xy}{\sqrt{xy^2+1}} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 0,3]$ *và* $h = 0,15$

4. $\begin{cases} y' &= xy^2 - \frac{y}{x} \\ y(0,5) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0,5; 1]$. *Tính* $y(0,75)$.

5. $\begin{cases} y' &= x\sin(x+2y) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0,1]$. *Tính* $y(0,08)$.

6. $\begin{cases} y' &= x\cos(x+2y) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0,1]$. *Tính* $y(0,08)$.

7. $\begin{cases} y' &= 5\ln(2x+1) + y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 0,4]$. *Tính* $y(0,2)$.

8. $\begin{cases} y' &= x\ln\left(2y^2+x+1\right) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 0,4]$. *Tính* $y(0,2)$.

9. $\begin{cases} y' &= (x+y)\ln(x+y) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 0,5]$. *Tính* $y(0,25)$.

6.3. *Cho phương trình vi phân* $\begin{cases} y' &= x\ln(2y+1) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0; 0,4]$. *Tính* $y(0,2)$ *bằng phương pháp Euler cải tiến với sai số* $\varepsilon = 10^{-4}$.

6.4. *Cho phương trình vi phân* $\begin{cases} y' &= x^2 \ln(2yx+2) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ *với* $x \in [0;0,4]$. *Tính* $y(0,2)$ *bằng phương pháp Euler cải tiến với sai số* $\varepsilon = 10^{-4}$.

6.5. *Cho hàm số* $f(x) = e^{x+1}\sin(x+1)$

i) *Sử dụng đa thức nội suy Newton tiến* $p_2(x)$ *xấp xỉ hàm số trên tại các mốc nội suy:* $\{0; 0.1; 0.2\}$.

ii) *Sử dụng đa thức vừa tìm ở câu i). Tính gần đúng* $f(0.05)$. *Đánh giá sai số.*

iii) *Sử dụng đa thức vừa tìm ở câu i), tính* $\int\limits_0^{0.2} p_2(x)dx$. *Đánh giá sai số.*

6.6. *Cho hàm số:* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

i) *Sử dụng đa thức nội suy Lagrange xấp xỉ hàm số trên tại các mốc nội suy* $\{0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$. *Sau đó tính gần đúng* $f(0.075)$, *đánh giá sai số.*

ii) *Sử dụng đa thức nội suy Newton tiến, xấp xỉ hàm số trên tại các mốc nội suy* $\{0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$. *Sau đó tính gần đúng* $f(0.075)$, *đánh giá sai số. Nhận xét kết quả so với câu i).*

iii) *Sử dụng kết quả câu i) ,ii) tính gần đúng* $\int\limits_0^{0.8} f(x)dx$. *Đánh giá sai số.*

6.7. *Cho bài toán Cauchy:* $\begin{cases} y' &= e^{\frac{-x^2}{2}} x \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ $; x \in [0, 1]$

i) *Tìm nghiệm chính xác của bài toán.*

ii) *Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến, xấp xỉ nghiệm chính xác vừa tìm được trên* $[0, 1]$ *với cỡ bước h=0.25. Với đa thức vừa tìm, kiểm lại xem(thế trực tiếp) có nghiệm đúng bài toán trên. Nhận xét.*

iii) *Tìm nghiệm xấp xỉ tại x=0.5 . Đánh giá sai số.*

Phụ lục

MỘT SỐ ĐỀ ÔN TẬP

Đề ôn tập số 1

Câu 1. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Seidel qua hai lần lặp.

$$\begin{cases} x + 29y - z + t = 30 \\ 19x + y + z - t = 20 \\ x - y + z + 29t = 30 \\ x + y + 28z - t = 29 \end{cases}$$

Đánh giá sai số ở lần lặp thứ 2.

Câu 2. Cho bảng số liệu

x	1.0000	1.5000	2.0000
y	12.5420	21.8155	37.3426

Từ bảng số liệu trên, bằng phương pháp bình phương bé nhất tìm hàm có dạng: $y = ae^{x+1} + b\sqrt{3x+1}$.
$(a = 2; b = -1)$

Câu 3. Cho tích phân $I = \int\limits_1^2 x\sin(2x+1)dx$

a) Tính gần đúng I bằng phương pháp Simpson 1/3. Biết chia đoạn $[1, 2]$ thành 10 đoạn có chiều dài bằng nhau. Không đánh giá sai số .

b) Nếu dùng phương pháp hình thang thì cần chia đoạn $[1, 2]$ thành ít nhất mấy đoạn có chiều dài bằng nhau để sai số khi tính gần đúng I không quá 10^{-3}.

Câu 4. Cho hàm $y = y(x)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y' = xy + \frac{\sin x}{x}, 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

a) Dùng phương pháp Euler cải tiến tính giá trị $y(1,05)$ thỏa yêu cầu sai số 10^{-3}.

b) Dùng phương pháp Runge-Kutta tính giá trị $y(1,25)$ không đánh giá sai số .

Đề ôn tập số 2

Câu 1. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Seidel qua 2 bước lặp

$$\begin{cases} x + 20y - z + t = 21 \\ 10x + y + z + t = 13 \\ x - y + z + 20t = 21 \\ x + y + 18z + t = 21 \end{cases}$$

Đánh giá sai số khi nhận giá trị xấp xỉ nghiệm ở lẩn ở lần lặp thứ hai.
Câu 2. Cho bảng số liệu

x	0	1	2
y	3,0000	4,1213	5,3416

Từ bảng số liệu trên, bằng phương pháp bình phương bé nhất tìm hàm có dạng:
$y = f(x) = ax + \frac{b}{\sqrt{x^2+1}}$.
$(a = 2, b = 3)$

Câu 3. Cho tích phân $I = \int\limits_1^2 e^{x^2+1} \sin x dx$

a) Tính gần đúng I bằng phương pháp Simpson 1/3. Biết chia đoạn $[1, 2]$ thành 10 đoạn có chiều dài bằng nhau. Không đánh giá sai số .

b) Nếu dùng phương pháp hình thang thì cần chia đoạn $[1, 2]$ thành ít nhất mấy đoạn có chiều dài bằng nhau để sai số khi tính gần đúng I không quá 10^{-3}.

Câu 4. Cho hàm $y = y(x)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{x}y + x^2e^x, 1 \le x \le 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) Dùng phương pháp Euler cải tiến tính giá trị $y(1, 05)$ thỏa yêu cầu sai số 10^{-3}.

b) Dùng phương pháp Runge-Kutta tính giá trị $y(1, 2)$ không đánh giá sai số .

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Kỳ Anh, Giải Tích số, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2000.

[2] Tạ Văn Đỉnh, Phương pháp tính, Nhà xuất bản Giáo dục , 1995.

[3] Lê Thái Thanh, Giáo trình phương pháp tính, Nhà xuất bản Giáo Dục, 2006.

[4] Nguyễn Phú Vinh, Giáo trình phương pháp tính, ĐH Công Nghiệp Tp. HCM, 2008.

[5] Dương Thủy Vỹ, Giáo tình phương pháp tính, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2000.