ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

TÓM TẮT BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP A2-A3

Giảng viên: Ngô Quốc Nhàn

Tp.HCM- 8/2015

Mục lục

Chương 1

HÀM NHIỀU BIẾN

1 Hàm nhiều biến

1.1 Các khái niệm

Định nghĩa 1.1. *Xét không gian Euclide n chiều* $\mathbb{R}^n$ *. Một phần tử* $M \in \mathbb{R}^n$ *là một bộ gồm n thành phần . Hàm số n biến thực trên* $D \subset \mathbb{R}^n$ *là một ánh xạ từ D vào* $\mathbb{R}$*, ta thường viết* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *hay* $z = f(M)$*.*
Khi đó: D gọi là miền xác định của hàm số ;
Miền giá trị của hàm f là tập hợp các giá trị của z khi M chạy khắp miền D .

Thí dụ 1.1. *Xét đồ thị hàm số:* $z = f(x, y) = -xye^{1-x^2-y^2}$*. Hình (1.1)*

1.2 Đạo hàm riêng

1.2.1 Đạo hàm riêng cấp 1

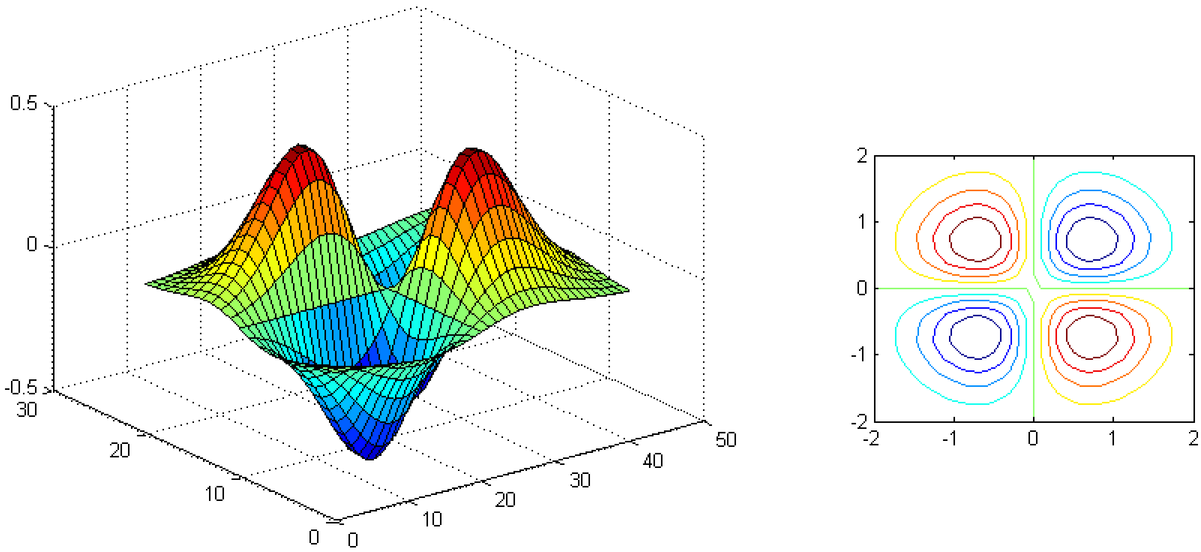
Đạo hàm theo biến x :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_x(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ hay } \mathrm{z'_x}(x_0, y_0)$$

Đạo hàm theo biến y :

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$



Hình 1.1: Đồ thị hàm 2 biến

$$f'_y(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ hay } z'_{\mathrm{x}}(x_0, y_0)$$

Thí dụ 1.2. *Xét hàm số $z = f(x, y) = xe^y$. Ta có:*
$z'_x = e^y$; $z'_y = xe^y$. *Hơn nữa* :$z'_x(2, 1) = e$; $z'_y(2, 1) = 2e$.

1.2.2 Đạo hàm riêng cấp cao

Đạo hàm hỗn hợp :

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y \text{ hay } \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \tfrac{\partial}{\partial y}(\tfrac{\partial f}{\partial x})$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y \text{ hay } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$$

Thí dụ 1.3. *Tính đạo hàm riêng cấp 2 của hàm : $z = f(x, y) = x\sin(xy)$.*
Ta có:
Đạo hàm cấp 1:

$$\begin{cases} z'_x = \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ z'_y = x^2\cos(xy) \end{cases}$$

Đạo hàm cấp 2:

$$\begin{cases} z''_{xx} = 2y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) \\ z''_{xy} = 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) \\ z''_{yy} = -x^3\sin(xy) \end{cases}$$

Định lý 1.1. *(Schwarz)*
Giả sử $f(x, y)$ cùng với các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ xác định trên một lân cận (x_0, y_0) và liên tục tại (x_0, y_0) thì :

$$z''_{xy}(x_0, y_0) = z''_{yx}(x_0, y_0)$$

Tương tự, ta có đạo hàm cấp n theo biến x, cấp n theo biến y ký hiệu là : $f^{(n+m)}_{x^n y^m}$

Thí dụ 1.4. *Tìm đạo cấp hai của $z = 3x^2 - 2xy^3 + 1$.*
Ta có:
Đạo hàm riêng cấp 1: $\begin{cases} z'_x = 6x - 6y^2 \\ z'_y = -6xy^2 \end{cases}$
Đạo hàm riêng cấp 2: $\begin{cases} z''_x = 6 \\ z''_{xy} = -6y^2 \\ z''_{yx} = -6y^2 \\ z''_{yy} = -12xy \end{cases}$
Như vậy $z''_{xy} = z''_{yx}$

1.3 Vi phân

1.3.1 Vi phân cấp 1

Nếu hàm hai biến f có các đạo hàm riêng liên tục, thực hiện tương tự hàm một biến, ta thiết lập được phương trình mặt phẳng tiếp xúc (tangent plane) với mặt $z = f(x, y)$ tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ là: $z - z_0 = f_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,\ y_0)(y - y_0)$
Rõ ràng những điểm trên mặt phẳng tiếp xúc càng gần tiếp điểm P thì khoảng cách từ điểm đó đến mặt $z = f(x, y)$ càng nhỏ. Tức là, khi x thay đổi từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$, y thay đổi từ y_0 đến $y_0 + \Delta y$ thì số gia tương ứng của z là Δz và ta có ước lượng sau, được gọi là xấp xỉ tuyến tính (linear aproximation) của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0).
$\Delta z \approx f_x(x_0,\ y_0)\Delta x + f_y(x_0,\ y_0)\Delta y$

Định nghĩa 1.2. $(x_0, y_0) \in D$, *cho các số gia $\Delta x, \Delta y$ sao cho $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$. Ta nói hàm z = f(x,y) khả vi tại (x_0, y_0) nếu số gia toàn phần*

$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ có thể biểu diễn dưới dạng $\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \theta(\Delta x, \Delta y)$.
Trong đó : A, B là hai số thực, $\theta(\Delta x, \Delta y)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, tức là:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\theta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

Khi đó, hàm $f(x,y)$ được gọi là khả vi tại (x_0,y_0) và biểu thức $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là vi phân của hàm số tại (x_0,y_0). Ký hiệu dz hay df.

Định lý 1.2. *Nếu hàm $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận $M_0(x_0,y_0)$ và các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f(x,y)$ khả vi tại M_0 và*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{1.1}$$

Thí dụ 1.5. *Tìm vi phân cấp 1 tại $M(0,1)$ của hàm $z = f(x,y) = x^2 + ye^x$*
Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x + ye^x \\ z'_y = e^x \end{cases} \Rightarrow dz = z'_x dx + z'_y dy = (2x+ye^x)dx + e^x dy.$
Từ đây ta có $dz(M) = dx + dy$.

1.3.2 Vi phân cấp 2

Vi phân cấp hai của hàm $z = f(x,y)$ là vi phân của vi phân toàn phần của nó, tức $d^2z = d(dz)$ (trong dz, ta xem dx, dy là những hằng số).

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy) \\ &= f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2 \end{aligned}$$

Thí dụ 1.6. *Tính vi phân cấp hai của hàm $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.*
Ta có: $f''_{xx} = \frac{2}{(x^2+y^2)} - \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $f''_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$; $f''_{yy} = \frac{2}{(x^2+y^2)} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2}$.
Như vậy:

$$d^2z = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left((2y^2-2x^2)dx^2 - 8xydxdy + (2x^2-2y^2)dy^2\right)$$

1.3.3 Vi phân cấp n

$$d^nz = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^n(f) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(n)}_{x^iy^{n-i}}dx^idy^{n-i}$$

1.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $f(x, y)$, trong đó $x = x(t)$ và $v = v(t)$ là những hàm số của biến t. Nếu $f(x, y)$ là hàm khả vi của biến x, y và $x(t), y(t)$ các hàm khả vi của t thì:

$$\frac{df}{dt} = f'_x \frac{dx}{dt} + f'_y \frac{dy}{dy}$$

Chú thích 1. *Nếu hàm $f = f(x, y)$ khả vi theo x, y và $y = y(x)$ là hàm khả vi của biến x thì ta có:*

$$\frac{df}{dx} = f'_x + f'_y \frac{dy}{dx}$$

1.3.5 Đạo hàm hàm ẩn

Cho hai biến x, y thỏa phương trình

$$F(x, y) = 0 \tag{1.2}$$

Nếu $y = y(x)$ là hàm số xác định trong 1 khoảng nào đó sao cho khi thế $y(x)$ vào(1.2), ta được đồng nhất thức thì $y = y(x)$ được gọi là hàm số ẩn xác định bởi (1.2).
Đạo hàm hai vế (1.2) theo x, ta được:
$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$, *với* $F'_y \neq 0$

1.3.6 Đạo hàm theo hướng. Građiên của hàm

Đạo hàm của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm $M(x, y)$ thoe hướng $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{MM_1}$ là giới hạn:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{|MM_1| \to 0} \frac{f(M) - f(M_1)}{|MM_1|} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho}$$

trong đó $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ Nếu hàm $f(x, y)$ khả vi thì đạo hàm theo hướng được tính theo công thức

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$$

với α là góc hợp bởi l với trục Ox.
Gra đi ên của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm $M(x, y)$ là vecto đi qua M và có các tọa độ là các đạo hàm riêng của hàm z:

$$gradz = \frac{\partial z}{\partial x} \overrightarrow{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \overrightarrow{j}$$

1.4 Cực trị

1.4.1 Cực trị địa phương

Định nghĩa 1.3. *Xét z = f(x,y) có $M_0(x_0, y_0)$ là cực đại địa phương nếu và chỉ nếu : $M(x, y) \in D, f(M) \leq f(M_0)$.*
Tương tự, ta có định nghĩa cho cực tiểu là $f(M) \geq f(M_0)$.

Định lý 1.3. *Giả sử $f(x_0, y_0)$ là cực trị của hàm f(x,y). Nếu cả hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y tồn tại tại (x_0, y_0)*

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

Định lý 1.4. *Giả sử:*

i) $z = f(x, y)$ khả vi hai lần;

ii) $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$;

iii) tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 của f(x,y) tồn tại trong lân cận hình tròn nào đó với (x_0, y_0) là tâm;

iv) Đặt:
$A = f''_{x^2}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$..

Gọi $\Delta = AC - B^2$. Nếu:

i) $\Delta > 0$ và $A < 0$ thì $f(x_0, y_0)$ là cực đại địa phương.

ii) $\Delta > 0$ và $A > 0$ thì $f(x_0, y_0)$ là cực đại địa phương.

iii) $\Delta < 0$ thì f(x,y) có điểm yên ngựa tại (x_0, y_0).

iv) $\Delta = 0$ thì vấn đề cực trị cần khảo sát thêm.

Thí dụ 1.7. *Tìm cực trị của các hàm số sau (nếu có)*

i) $z = f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 4y$;

ii) $z = f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 - 2y$.

....
....
....
....
....
....
....
....

1.4.2 Cực trị có điều kiện. Phương pháp nhân tử Lagrange

Bài toán: *ta cần tìm cực trị của hàm z = z(x,y) thỏa điều kiện* $\varphi(x, y) = 0$ *.*
Trong đó $f(x, y), \varphi(x, y)$ *có các đạo hàm riêng liên tục,* $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0, \varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Phương pháp (Nhân tử Largrange)

1. *Xét hàm* $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$
2. *Tìm điểm dừng* (x_0, y_0)

$$\begin{cases} L'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ L'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. *Ta xét dấu :*

$$d^2L = L''_{x^2}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}dy^2$$

Nếu $d^2L(x_0, y_0) > 0$ *thì* (x_0, y_0) *là điểm cực tiểu.*
$d^2L(x_0, y_0) < 0$ *thì* (x_0, y_0) *là điểm cực đại .*

Chú thích 2.

$$\varphi'_x.dx + \varphi'_y.dy = 0, \quad dx^2 + dy^2 > 0$$

Chú thích 3. *Trường hợp tính x theo y từ* $\varphi(x, y) = 0$ *thực hiện đơn giản, ta có thể đưa* $z = f(x, y)$ *về hàm một biến số rồi giải.*

Thí dụ 1.8. *Tìm cực trị hàm* $z = xy$ *thỏa* $\varphi(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$
+ Xét :$L = f + \lambda.\varphi(x, y) = xy + \lambda[(x - 1)^2 + y^2 - 1]$.
+ Điểm dừng là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} y + 2\lambda\ (x - 1) = 0 \\ x + 2\lambda\ y = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \lambda = 0, x = 0, y = 0 \\ \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x = \frac{3}{2}\ , y = \ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x = \frac{3}{2}\ , y = \ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

Vi phân cấp hai của hàm Lagrange :

$$d^2L(x,y) = 2\lambda dx^2 + 2dxdy + 2\lambda dy^2$$

....
....
....
....
....
....
....
....

Thí dụ 1.9. *Tìm cực trị của hàm* $z = f(x,y) = x(y-1)^2 - x^2 + 5x$ *thỏa* $x - y + 1 = 0$.
Từ điều kiện $x - y + 1 = 0$, *ta có:* $x = y - 1$, *thế vào hàm ban đầu, ta được* $z = z(x) = x^3 - x^2 + 5x$, *đây là hàm một biến số.*
$z' = 3x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = -1 \vee x = x_2 = \frac{-5}{2}$. *Ta tìm được các giá trị của y tương ứng* $y_1 = -2, y_2 = -\frac{7}{2}$.
Tiến hành xét dấu đạo hàm, ta có hàm số đạt cực đại tại $(-5/2, -7/2)$, *đạt cực tiểu tại* $(-1, -2)$.

1.4.3 Giá trị cực đại tuyệt đối, cực tiểu tuyệt đối của hàm 2 biến trên một tập đóng, bị chặn

Tập đóng (closed set) trong là tập chứa tất cả các điểm biên của nó, chẳng hạn đĩa $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Tập bị chặn (bounded set) trong là tập chứa được trong một đĩa nào đó. Trong $\mathbb{R}^2$ *mọi tập đóng đều bị chặn.*

Định lý 1.5. *(Extreme value theorem for function of two variables) Nếu f liên tục trên một tập đóng* $D \subset \mathbb{R}^2$ *thì f đạt được giá trị cực đại tuyệt đối và giá trị cực tiểu tuyệt đối trên D.*

Phương pháp tìm giá trị cực đại tuyệt đối và giá trị cực tiểu tuyệt đối của một hàm hai biến f :

1. *Tìm các giá trị của f tại các điểm tới hạn của f trong D.*

2. *Tìm các giá trị cực trị của f trên biên D.*

3. *Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hai bước trên là giá trị cực đại tuyệt đối (cực tiểu) tuyệt đối của f trên D.*

Thí dụ 1.10. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số* $f(x,\ y) = x^2 + 2y^2 - x$ *trên hình tròn* $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Tìm điểm tới hạn của hàm f trong D và tính giá trị của f tại đó:
$\begin{cases} f_x = 2x - 1 = 0 \\ f_y = 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0\left(\frac{1}{2},\ 0\right) \in D$
Ta có $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.
Tìm điểm tới hạn của hàm Lagrange trên biên $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Hàm Lagrange $L(x,\ y,\ \lambda) = x^2 + 2y^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ *có 4 điểm tới hạn* $M_1(1,\ 0)$; $M_2(-1,\ 0)$; $M_3\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $M_4\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *với* $f(M_1) = 0,\ f(M_2) = 2,\ f(M_3) = \frac{9}{4}$,
Vậy: hàm f có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$ *và đạt tại* M_3 *hoặc* M_4*;*
hàm f có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{1}{4}$ *và đạt tại* M_0.

2 Một số mặt bậc hai

Định nghĩa 1.4. *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz , mặt bậc hai là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ thỏa mãn một phương trình đại số bậc hai đối với x, y, z :*

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$$

Với A, B, C, D, E, F, G, H, K, L là các số thực , A, B, C, D, E, F không đồng thời bằng không .

Trong tính toán chúng ta thường gặp các mặt sau

- *[A] Mặt Cầu*
  Phương trình

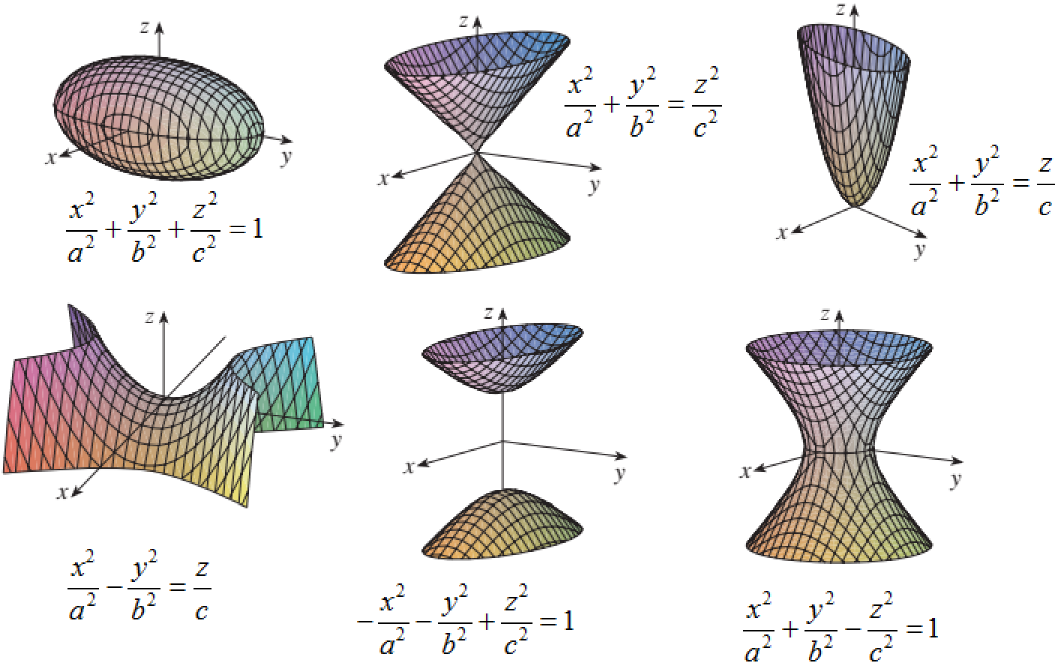
$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ & \Leftrightarrow z = f(x,y) = \pm\sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} \end{aligned}$$

  Phương trình tham số

$$\begin{cases} x = a + R\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + R\cos\theta \end{cases} ,0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

- *[B] Mặt Elipxôit*

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.\mathrm{a, b, c} > 0 \\ & \Leftrightarrow z = f(x,y) = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{aligned}$$



Hình 1.2: Một số mặt bậc hai

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.\mathrm{a,b,c}>0$$
$$\Leftrightarrow z=f(x,y)=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

- *[C] Mặt trụ*
  Trụ Eliptic

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\mathrm{a,b}>0$$

Trụ parabolic

$$y^2=2px$$

- *[D] Mặt yên ngựa (parabolit hyperbolic)*
  Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.\mathrm{a,b}>0$$

Chú thích 4. *Nếu dùng các mặt phẳng song song với các mặt tọa độ cắt hình ta sẽ được giao tuyến là parabol hoặc hyperbol*

- *[E] Mặt hyperboloit một tầng*
  Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.\mathrm{a, b, c} > 0$$

Chú thích 5. *Nếu dùng các mặt phẳng song song với các mặt tọa độ cắt hình ta sẽ được giao tuyến là parabol hoặc hyperbol*

Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.\mathrm{a, b} > 0$$

Chú thích 6. *Nếu dùng các mặt phẳng song song với các mặt tọa độ cắt hình ta sẽ được giao tuyến là parabol hoặc elip*

- *[F] Mặt nón eliptic*
  Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.\mathrm{a, b, c} > 0$$

Chú thích 7. *Nếu dùng các mặt phẳng song song với các mặt tọa độ cắt hình ta sẽ được giao tuyến là hyperbol hoặc elip*

3 Bài tập

1.1. *Tìm đạo hàm riêng của các hàm số sau:*

1. $z = x^3 + y^3 - 3axy$;
2. $z = \frac{x-y}{x+y}$;
3. $z = \ln(x + x^2 + y^2)$;
4. $z = ln\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$;
5. $z = (xy)^z$;
6. $z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ *tại* $M(2, 1)$;
7. $z = \ln(xy + z)$ *tại* $M(1, 2, 0)$

1.2. *Tìm vi phân cấp 1 của các hàm số sau:*

1. $z = x^2 + 4^y$
2. $z = x^2 - 2xy + \sin(xy)$.
3. $z = \arctan(y - x)$.
4. $z = \ln\left(\sqrt{x - y}\right)$
5. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;
6. $z = x^2 y^3$;
7. $z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$;
8. $z = \ln\tan\frac{y}{x}$;
9. $z = \ln(x^2 + y^2)$;
10. $z = \arctan\frac{xy}{x^2}$;
11. $z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ *tại* $M(3, 4, 5)$;

1.3. *Tìm vi phân cấp 2 của các hàm số sau*

1. $z = \sin^2 x + e^{y^2}$
2. $z = 2\sin x\cos y + 2xe^{y^2}$
3. $z = \ln\sqrt{\frac{x^2 + \sin^2 y}{\sin^2 x + y^2}}$
4. $z = -2\cos 2x + 2ye^{x^2}$
5. $z = y\cos 2x + xe^{y^2}$
6. $z = xe^y + y^2 + y\sin x$
7. $z = e^{x+2y}$
8. $z = x^2 + x\sin^2 y$
9. $z = x^2 + x\cos^2 y$.

1.4. *Tìm cực trị của các hàm số sau:*

1. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

2. $z = (x-1)^2 + 2y^2$;
3. $z = (x-1)^2 - 2y^2$;
4. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;
5. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;
6. $z = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$;
7. $z = 1 - (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}} - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;
8. $z = (x^2+y^2)e^{-(x+y)^2}$;
9. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$;
10. $z = -x^2 + 4xy - 10y^2 - 2x + 16y$.
11. $z = x^3 - 2x^2 + 2y^3 + 7x - 8y$.
12. $z = x^2 - y - \ln|y| - 2$.
13. $z = \ln x - x + \ln|y| - \frac{y^2}{2}$
14. $z = x.e^y + x^3 + 2y^2 - 4y$.
15. $z = x^6 - y^5 - \cos^2 x - 32y$.

1.5. *Tìm cực trị của các hàm số sau với điều kiện tương ứng*

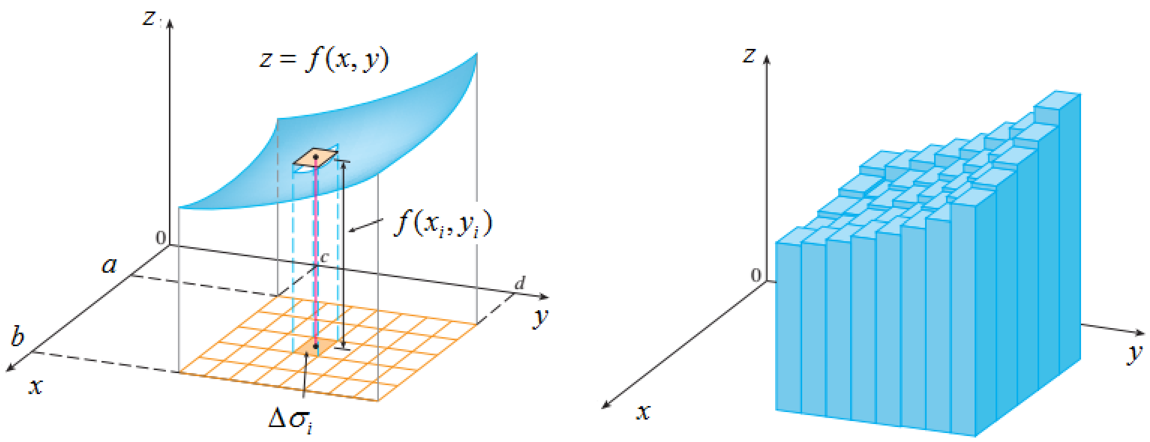
1. $z = 6 - 4x - 3y$ *với* (x, y) *thỏa* $x^2 + y^2 = 1$;
2. $z = xy$ *với* (x, y) *thỏa* $x + y = 1$;
3. $z = x + 2y$ *với* (x, y) *thỏa* $x^2 + y^2 = 5$;
4. $z = x^2 + y^2$ *với* (x, y) *thỏa* $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$;
5. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ *với* (x, y) *thỏa* $x - y = \frac{\pi}{4}$.
6. $z = \frac{x^3}{3} - 3x + y$ *với* $-x^2 + y = 1$
7. $z = x^2(y+1) - 3x + 2$ *với* $x + y = 1$.
8. $z = \ln|1 + x^2y|$ *với* $x - y - 3 = 0$.
9. $z = x^2(y-1) - 3x + 2$ *với* $x - y + 1 = 0$

Chương 2

TÍCH PHÂN BỘI

1 Tích phân bội 2

1.1 Bài toán mở đầu:



Hình 2.1: Tích phân bội 2

Định nghĩa 2.1. *Cho hàm $f(x, y)$ xác định trong miền đóng hữu hạn thuộc mặt phẳng Oxy. Chia miền D một cách thành n miền nhỏ sao cho từng đôi một không có điểm chung: $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ có diện tích $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$ và đường kính $d_1, d_2, ..., d_n$[1]. Ký hiệu đường kính lớn nhất của các yếu tố diện*

[1] Đường kính của một miền là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm biên miền đó

tích $d = max\{d_k\}, k = \overline{1, n}$.
Lấy trong mỗi miền nhỏ một điểm $M_i(x_i, y_i)$. *Lập tổng:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \cdots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n$$

$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = \lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$, *D là miền đóng và bị chặn.*

Chú thích 8. *Vì tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các miền nhỏ nên ta có thể chia D bởi lưới các đường thẳng song song với các trục Ox, Oy . Khi đó:* $d\sigma = dxdy$
$f(x, y) = 1, \forall(x, y) \in D$ *thì diện tích miền* D : $S_D = \iint\limits_D dxdy$

1.2 Tính chất

1. *Nếu f liên tục trong D thì f khả tích trên D*

2. *Tích phân kép có tính tuyến tính*

$$\iint\limits_D (f + g)dxdy = \iint\limits_D fdxdy + \iint\limits_D gdxdy$$

$$\iint\limits_D Kfdxdy = K\iint\limits_D fdxdy \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

3. *Nếu* $D = D_1 \cup D_2$ *và* $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ *thì* $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy$

4. *Nếu* $f(x, y) \le g(x, y), \forall(x, y) \in D$ *thì* $\iint\limits_D f(x, y)dxdy \le \iint\limits_D g(x, y)dxdy$.

5. *Nếu*

$$m \le f(x, y) \le M, \forall(x, y) \in D$$

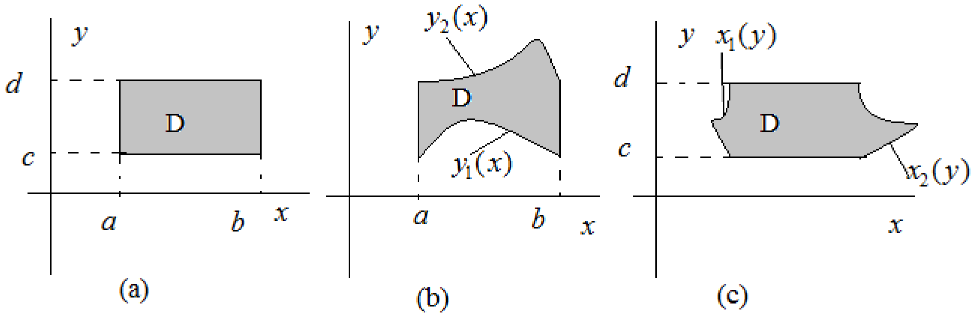
Thì

$$mS \le \iint\limits_D f(x, y)dxdy \le MS$$

6. *Nếu* $f(x,y)$ *liên tục trên một miền đóng và bị chặn* D *thì trong* D *có ít nhất một* (x_0, y_0) *sao cho*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\sigma$$

1.3 Các phương pháp tính tích phân



Hình 2.2: Một số dạng miền D

1.3.1 Trong hệ trục tọa độ Descartes(2.2(a)).

D là hình chữ nhật $D = \{(x,y)/a \le x \le b; c \le y \le d\} = [a,b] \times [c,d]$ *thì*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b (f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Thí dụ 2.1. $D = [0,1] \times [1,2]$, *tính :* $I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$.

....
....
....
....

Miền D giới hạn bởi (2.2(b)) $D = \{(x,y)/a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$
$D = [a,b] \times [y_1(x), y_2(x)]$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f(x,y)dy \right) dx$$

Miền D giới han bởi (2.2(c)) $D = \{(x,y)/x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\}$ $D = [x_1(y), x_2(y)] \times [c,d]$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} (f(x,y)dx \right) dy$$

Thí dụ 2.2. *Tính*

i) $\iint\limits_D xy \ln x dxdy$, *D được giới hạn bởi* $[0,e] \times [1,2]$;

ii) $\iint\limits_D (x+y)dxdxy$, *D được giới hạn bởi* $y = x^2 + 2; y = 2x + 5$.

....
....
....
....
....
....
....
....

1.3.2 Phương pháp đổi biến

Xét $\iint\limits_D dxdxy$ *vì lấy tích phân trên miền D quá phức tạp nên ta biến D thành miền* D' *đơn giản hơn, chẳng hạn như hình chữ nhật,....*
Đặt

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

. Trong đó các điều sau phải thỏa mãn:

i) *u(x,y) , v(x,y) cùng các đạo hàm riêng liên tục trên miền D*

ii) *Phép đặt là một song ánh* $D \to D'$

iii)

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}} \ne 0$$

Chú thích 9. *J có thể bằng không tại một số điểm trong D' Lúc này, ta có:*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,dudv$$

Thí dụ 2.3. *Miền D' là tam giác O(0,0), A(2,0), B(0,2), được biến hình qua phép biến hình phi tuyến $G : (x,y) = G(u,v) = (u+v, u^2 - v)$ Tính :*

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}}$$

trên miền biến hình $D = G(D')$.
Đặt :

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 - v \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -1 \end{vmatrix} = -(1+2u) \neq 0$$

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}}.dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{1}{2u+1}\,|J|\,.dudv = \iint\limits_{D'} dudv = 2$$

Chú thích 10. *Nếu D có dạng :*

$$\begin{cases} u(x,y) = a \\ u(x,y) = b \\ v(x,y) = c \\ v(x,y) = d \end{cases}$$

Đặt :

$$\begin{cases} u = u(x,y) \Rightarrow u \in [a,b] \\ v = v(x,y) \Rightarrow v \in [c,d] \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}}$$

Thí dụ 2.4. *Tính các tích phân sau:*

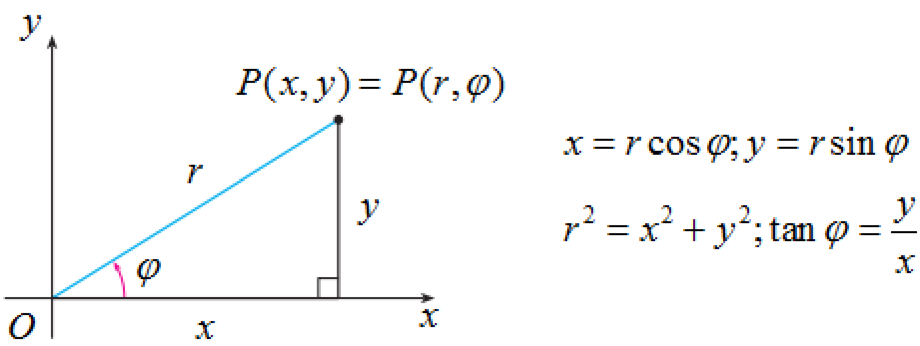
i) $\iint\limits_{D} xydxdy$, *D được giới hạn bởi* $y^2 = 2x; y = x; y^2 = 3x; y = 2x$

ii) $\iint\limits_{D} (x+y)^3(x-y)\,dxdy$, *D được giới hạn bởi* $y^2 = px; y^2 = qx$; $x^2 = ay; x^2 = by; 0 < p < q, 0 < a < b$

iii) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, *D được giới hạn bởi* :$xy = 1; xy = 2; y = x; y = 3x(x > 0, y > 0)$.

iv) $\iint\limits_D (x^2 - y^2)dxdy$, *D được giới hạn bởi* $x + y - 1 = 0; x - y = 0; x + y = 2; x - y - 2 = 0$.

1.3.3 Miền D trong hệ tọa độ cực



Hình 2.3: Tọa độ cực

Đặt :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

,với

$$0 \le r < +\infty \ , 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

Chú thích 11. *Phép đổi biến này dùng khi D có dạng cung tròn hoặc Elip.*

Thí dụ 2.5. *Tính các tích phân sau:*

i) $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$*, D được giới hạn bởi :* $x^2+y^2=a^2; x^2+y^2=4a^2$

ii) $\iint\limits_{D} xy^2\,dxdy$*, D được giới hạn bởi :* $x^2+(y-1)^2=1$ *,* $x^2+y^2-4y=0$

iii) $\iint\limits_{D} (x^2+y^2)dxdy, D = \{(x,y)/x^2+y^2-x-y \le 0\}$

iv) $\iint\limits_{D} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$*, D là elip:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1.4 Ứng dụng tích phân bội 2

1.4.1 Diện tích miền D

$$S = \iint\limits_{D} dxdy$$

Thí dụ 2.6. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:*

i) $x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 4x \ ; y = x, y = 0$

ii) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

iii) $x = 4y - y^2 \ , x + y = 6$

iv) $x^2 + y^2 \leq 2x \ , \ x^2 + y^2 \leq 2y.$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1.4.2 Thể tích hình trụ V

$$V_D = \iint\limits_D f(x, y)dxdy \tag{2.1}$$

Thí dụ 2.7. *Tính thể tích phần giới hạn bởi các mặt :*

i) $x = 0 \ , y = 0 \ , z = 0 \ , \ \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$

ii) $x^2 + y^2 = 2 \ , \ z = 4 - y^2 - x^2 \ , z = 0$

iii) $z = x^2 + y^2 \ , \ z = x + y \ .$

iv) $y = 1 + x^2 \ , z = 3x \ , y = 5 \ , z = 0$ *nằm trong góc phần tám thứ nhất.*

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

1.4.3 Khối lượng của hình phẳng không đồng chất

Xét tấm phẳng chiếm miền D trong mặt phẳng Oxy, khối lượng riêng $\gamma(x, y)$ là hàm liên tục trong miền D. Ta có khối lượng của tấm phẳng:

$$m = \iint_D \gamma(x, y)dxdy$$

1.4.4 Mômen quán tính của tấm phẳng

Mômen quán tính của tấm phẳng có khối lượng riêng $\gamma(x, y)$ chiếm miền D trong mặt phẳng Oxy đối với điểm O:

$$I_O = \iint_D \gamma(x, y)(x^2 + y^2)dxdy$$

Mômen quán tính của tấm phẳng D đối với trục Ox, Oy lần lượt:

$$I_{xx} = \iint_D \gamma(x, y)x^2dxdy$$

$$I_{yy} = \iint_D \gamma(x, y)y^2dxdy$$

1.4.5 Tọa độ khối tâm và mômen tĩnh của tấm phẳng

Tọa độ khối tâm của tấm phẳng được tính theo các công thức:

$$x_C = \frac{M_x}{m}; y_C = \frac{M_y}{m}$$

Trong đó:

$$M_x = \iint_D \gamma(x, y)xdxdy; M_y = \iint_D \gamma(x, y)ydxdy$$

Được gọi là mômen tĩnh của tấm D đối với các trục Ox, Oy.

Chú thích 12. *Trong trường hợp $\gamma = const$, ta có:*

$$x_C = \frac{M_x}{\sigma}; y_C = \frac{M_y}{\sigma}$$

với σ là diện tích miền D.

2 Tích phân bội ba

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.2. *Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trong miền đóng, bị chặn V . Chia miền V thành n miền đóng rời nhau có thể tích là $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$ và các đường kính tương ứng là $d_1, d_2, ..., d_n$ .... Lấy $M_i \in V_i$. Nếu giới hạn :*

$$\lim_{\max d_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \, . \, \Delta V_i \right)$$

không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm M_i thì gọi đó là tích phân bội 3 .

Kí hiệu :

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz$$

Tính chất : (Tương tự như tích phân bội 2)

2.2 Các phương pháp tính tích phân bội 3

2.2.1 Trong hệ trục tọa độ vuông góc

Miền $V = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) \, dz$$

Miền $V = [a, b] \times [y_1(x), y_2(x)] \times [z_1(x, y), z_2(x, y)]$

$$I = \int_{a}^{b} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz$$

Công thức tổng quát :

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$$

D_{xy} là hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy

$$I = \iint\limits_{D_{xz}} \left(\int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dxdz$$

D_{xz} là hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxz

$$I = \iint\limits_{D_{yz}} \left(\int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dydz$$

D_{yz} là hình chiếu của V lên mặt phẳng Oyz

Thí dụ 2.8. *Tính* $\iiint\limits_V zdxdydz$*, trong đó, V được xác định bởi:* $0 \le x \le$ $; x \le y \le 2x; 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$*. Ta có :*

$$I = \int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_x^{2x} z^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_x^{2x} (1-x^2-y^2)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} \left[y - yx^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_x^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} \left(x - \frac{10}{3}x^3 \right) dx = \frac{7}{192}$$

Thí dụ 2.9. *Tính các tích phân sau:*

i) $J = \iiint\limits_V xyz\,(1-x-y-z)dxdydz$ *với V :*$x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 1$;

ii) $I = \iiint\limits_V xydxdydz$ *V :* $2x+3y-12=0, x=0, z=y, z=\frac{1}{2}y$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.2.2 Phương pháp đổi biến

Xét

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

Vì lấy tích phân trên miền V nên ta biến về miền V' đơn giản hơn, như các hình hộp chữ nhật.

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

Trong đó:

i) *x(u,v,w) ,y(u,v,w) ,z(u,v,w) cùng các đạo hàm riêng liên tục trên miền đóng V'*

ii) *Phép đặt là một song ánh $V \to V'$*

iii)

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

Khi đó :

$$I = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw$$

Chú thích 13. *V là hình hộp xiên*

$$\begin{cases} u(x,y,z) = a \\ u(x,y,z) = b \\ v(x,y,z) = c \\ v(x,y,z) = d \\ w(x,y,z) = e \\ w(x,y,z) = f \end{cases}$$

. Đặt

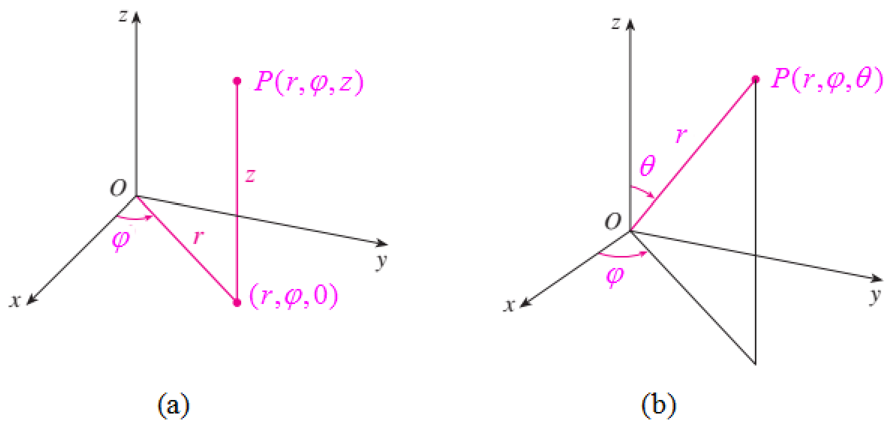
$$\begin{cases} u = u(x,y,w) \Rightarrow u \in [a,b] \\ v = v(x,y,w) \Rightarrow v \in [c,d] \\ w = w(x,y,w) \Rightarrow v \in [e,f] \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_w \end{vmatrix}}$$

Thí dụ 2.10. *Tính các tích phân sau:*
a) $\iiint\limits_V dxdydz$, *V được xác định bởi* $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y| \le 1$
b) $\iiint\limits_V dxdydz$, *V được xác định bởi* : $x+y+z = \pm 2, -x+2y+3z = \pm 3, 2x+3y-3z = \pm 4$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.2.3 Tọa độ trụ (2.4 (a))



Hình 2.4: Tọa độ trụ-cầu

Đặt :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & ,0 \le r \\ y = r\sin\varphi & ,0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = z & ,-\infty < z < +\infty \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \iiint\limits_{v_{r\varphi z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r dr d\varphi\, dz$$

Chú thích 14. *Dùng khi miền D có dạng tròn hoặc elip.*

Thí dụ 2.11. *Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, nếu V giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x, y = 0, z = 0, z = a$.*
Chuyển sang tọa độ trụ. Khi đó, phương trình mặt trụ: $r = 2\cos\varphi$. Do đó, các tọa độ thay đổi như sau: $0 \le r \le 2\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \pi/2, 0 \le z \le a$. Do đó:

$$I = \iiint\limits_{V'} zr.rdrd\varphi dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^a zdz$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \frac{8}{9}a^2$$

Thí dụ 2.12. *Tính các tích phân sau:*

i) $\iiint\limits_{V} (x^2+y^2)dxdydz$, *V là miền được xác định bởi:* $x^2+y^2 = 2z, z = 2$
.

ii) $\iiint\limits_{V} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ *V là miền xác định bởi* $x^2+y^2 = 2x, y \geq 0, z = 0, z = a > 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.2.4 Tọa độ cầu (2.4(b))

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & ,0 \leq r < +\infty \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & ,0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = r\cos\theta & ,0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{V_{r\varphi\theta}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta dr d\varphi\, d\theta$$

Chú thích 15. *Dùng khi miền V có dạng hình cầu.*

Thí dụ 2.13. *Tính* $\iiint\limits_{V} x^2dxdydz$*, V là hình cầu* $x^2+y^2+z^2 \geq R^2$*.*

Chuyển sang tọa độ cầu. Ta có $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$*. Do vậy:*

$$I = \iiint_V r^4\sin^3\theta\cos^2\varphi dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^{R} r^4 dr = \frac{4\pi R^5}{15}$$

Thí dụ 2.14. *Tính các tích phân sau:*
a) $\iiint\limits_{V} x^2dxdydz$*, V là miền xác định bởi* $x^2+y^2+z^2 = R^2$*;*

b) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, *V là miền xác định bởi* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=z^2, z>0 \end{cases}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.3 Ứng dụng của tích phân bội 3

2.3.1 Thể tích V

$$V = \iiint\limits_V dxdydz$$

2.3.2 Khối lượng của vật thể V

Khối lượng của vật thể có thể tích V, tỉ khối $\gamma(x,y,z)$

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz$$

2.3.3 Tọa độ khối tâm của vật thể V

$$x_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)dxdydz$$

$$y_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)dxdydz$$

$$z_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)dxdydz$$

Thí dụ 2.15. *Tính thể tích giới hạn bởi các mặt :*

i) $z = x^2 + y^2$, $z = 0$,$x = 0$,$y = 0$, $x + y = 4$

ii) $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$

iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$ *(phần trong hình trụ).*

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3 Bài tập

2.1. *Thay đổi thứ tự lấy tích phân*

1. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy;$

2. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy;$

3. $I = \int\limits_0^a dx \int\limits_{(a^2-x^2)/2a}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy;$

4. $I = \int\limits_{a/2}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy;$

5. $I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx;$

2.2. *Tính các tích phân sau*

1. $\iint\limits_D \frac{x}{y} \ln y dxdy$ *với* $D = [0,2] \times [1,e];$

2. $\iint\limits_D e^{x+y} dxdy$ *với* $D = [0,1] \times [0,1];$

3. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2+1} dxdy$ *với* $D = [0,1] \times [0,1];$

4. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$ *với* $D = [0,1] \times [0,1];$

5. $\iint\limits_D e^{x-y} dxdy$ *với* $D = [0,1] \times [0,1];$

6. $\iint\limits_D x \ln y dxdy$ *với* $D = [0,2] \times [1,e];$

7. $\iint\limits_D e^{y/x} dxdy$ *với* D *được giới hạn bởi* :$y = x, y = 0, x = 1;$

8. $\iint\limits_D 2xy dxdy$ *với* D *được giới hạn bởi*:$y = x, y = \sqrt{x}.$

2.3. *Tính các tích phân sau trong tọa độ cực*

1. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy,$ *với* $D : x^2 + y^2 \leq a^2;$

2. $\iint\limits_D x^2 + y^2 dxdy,$ *với* $D : x^2 + y^2 \leq a^2; y \geq 0;$

3. $\iint\limits_D xy dxdy,$ *với* $D : x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0;$

4. $\iint\limits_D x^2 + y^2 dxdy,$ *với* $D : x^2 + y^2 \leq 2ax;$

5. $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy,$ *với* $D : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0;$

6. $\iint\limits_D x^2 + y^2 dxdy$, *với* $D : x^2 + y^2 \leq 2ay$;

7. $\iint\limits_D \sqrt{4 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$, *với* $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1, \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$;

2.4. *Tính các tích phân sau:*

1. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$;

2. $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} xdz$;

3. $I = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$;

4. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz$;

2.5. *Tính các tích phân sau:*

1. $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}, V : x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$;

2. $I = \iiint\limits_V 2xydxdydz, V = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$;

3. $I = \iiint\limits_V 3z^2dxdydz, V = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$;

4. $I = \iiint\limits_V 2xdxdydz, V$ *được giới hạn bởi* :$z = xy, x + y = 1, z = 0$;

5. $I = \iiint\limits_V (xyz)^2dxdydz$, V *được giới hạn bởi các mặt:* $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1, z = -1, z = 1$;

6. $I = \iiint\limits_V (x + y + z)^2dxdydz$, V *được giới hạn bởi* : $2az \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$;

2.6. *Tính các tích phân sau trong tọa độ trụ, tọa độ cầu*

1. $I = \iiint\limits_V xyz^5dxdydz$, V *là phần chung của hai hình cầu* $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$;

2. $I = \iiint\limits_V [(x+y)^2 - z]dxdydz$, *V được giới hạn bởi :* $(z-1)^2 = x^2 + y^2, z = 0$ *;*

3. $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, *V được giới hạn bởi :* $2z = x^2 + y^2, z = 2$ *;*

4. $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, *V là phần trong của mặt:* $x^2+y^2+z^2 \leq x$ *;*

Chương 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG- TÍCH PHÂN MẶT

1 Tích phân đường

1.1 Tích phân đường loại 1

1.1.1 Bài toán mở đầu

Xuất phát từ việc tính khối lượng (hay mật độ của một đại lượng vật lý nào đó) trên cung AB khi biết khối lượng riêng của cung, người ta đưa ra khái niệm tích phân đường loại 1.

Định nghĩa 3.1. *Xét cung* $\overset{\frown}{AB}$ *và hàm* $z = f(x, y)$*, chia cung AB thành n phần* Δl_i *, lấy trên mỗi* Δl_i *một điểm* M_i*. Lập tổng* $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$
Nếu $n \to +\infty$ *sao cho* $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta l_i \to 0$ *, tổng có giới hạn hữu hạn, thì ta nói f khả tích trên cung AB và gọi giới hạn này là tích phân đường loại một của f trên cung AB.*
Kí hiệu :

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl$$

Định lý 3.1. *Nếu cung AB trơn và hàm* $f(x, y)$ *liên tục trên AB thì tích phân* $\int\limits_{AB} f(x, y)dl$ *tồn tại.*

Chú thích 16. *i) Khi* $f(x, y)$ *là khối lượng riêng của đường cong thì tích phân đường loại 1 là bài toán tính khối lượng của đường cong phẳng.*

ii) Nếu L là kín, ta viết $\oint\limits_L f(x,y)dl$.

iii) Từ định nghĩa trên, ta không phân biệt hướng, nên $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl$

iv) Tính chất của tích phân đường loại một thực chất giống như tích phân xác định đã học, nên tính chất của tích phân xác định được áp dụng cho tích phân đường loại 1 .

1.1.2 Phương pháp tính

Do nhận xét trên, nên để tính tích phân đường loại một, ta đưa về tích phân xác định bằng cách tham số hóa đường cong L :

a) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$; $t_1 \le t \le t_2$; $x_A = x(t_1); x_B = x(t_2)$. *Khi đó:*

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}dt$$

Mở rộng cho ba chiều :

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2 + {z'_t}^2}dt$$

b) $y = y(x), a \le x \le b$, $x_A = a, x_B = b$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + {y'_x}^2}dx$$

Thí dụ 3.1. *Tính* $\int\limits_C (x+y)dl$ *với C là chu vi tam giác ABO. Trong đó* $A(0,1); B(1,0); O(0,0)$.

Do tính chất của tích phân đường, ta có :

$\int\limits_C (x+y)dS = \int\limits_{OA} (x+y)dl + \int\limits_{AB} (x+y)dl + \int\limits_{BO} (x+y)dl$, *riêng AB có phương trình :* $y = -x+1; \Rightarrow dl = \sqrt{1+{y'_x}^2}dx = \sqrt{2}dx$. *Do vậy, ta có:* $\int\limits_C (x+y)dl = \int\limits_0^1 ydy + \int\limits_0^1 (x+1-x)\sqrt{2}dx + \int\limits_0^1 xdx = \sqrt{2}+1$

Thí dụ 3.2. *Tính* $I = \oint\limits_C zdl$*, trong đó, C là cung tròn trong không gian*
$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi \\ z = \varphi \end{cases}$$
Giải:

$$I = \int\limits_0^\pi \varphi\sqrt{1 + 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi}d\varphi = \sqrt{5}\int\limits_0^\pi \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi^2$$

1.1.3 Ứng dụng

a) Độ dài cung
Chiều dài cung $\overrightarrow{OB}$ *:*

$$L = \int\limits_{OB} dl$$

b) Trọng tâm, khối lượng của cung AB
Khối lượng riêng của cung AB tại M(x,y,z) là $\rho(M)$ *thì các tọa độ trọng tâm là :*

$$x_G = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} x\rho(M)dl; y_G = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} y\rho(M)dl; z_G = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} z\rho(M)dl$$

với $m = \int\limits_{AB} \rho(M)dS$ *là khối lượng của cung AB trong không gian ba chiều .*

Thí dụ 3.3. *Tính khối lượng m của cung thuộc đường cong* $x = t, y = \frac{t^2}{2}, z = \frac{t^3}{3}, 0 \le t \le 1$ *có mật độ đường thay đổi theo quy luật* $\rho = \sqrt{2y}$.

....
....
....
....
....
....
....
....

1.2 Tích phân đường loại 2

1.2.1 Bài toán mở đầu

Tích phân đường loại 2 xuất phát từ bài toán tính công của một lực phẳng $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ *di chuyển trên đường cong phẳng L từ A đến B.*

Chia AB thành n cun nhỏ bởi các điểm $A_0 = A, A_1, ..., A_n = B$. *Gọi* $\Delta x_i, \Delta y_i$ *là các thành phần của vecto* $A_{i-1}A_i$. $W_i = \overrightarrow{F_i}\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = (\overrightarrow{P_i}, \overrightarrow{Q_i})(\overrightarrow{\Delta x_i}, \overrightarrow{\Delta y_i})$

$W = \sum\limits_{i=1}^{n} W_i = \sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i$

Định nghĩa 3.2. *Khi* $n \to +\infty$ *sao cho* $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \{(\Delta x_i, \Delta y_i)\} \to 0$ *nếu giới hạn trên tồn tại hữu hạn thì giá trị giới hạn này được gọi là tích phân đường loại 2 của hàm vecto* $\overrightarrow{F}(x,y)$ *trên cung L . Lúc này ta nói hàm vecto khả tích trong cung L và ký hiệu giới hạn này là :*

$$\int\limits_{\overrightarrow{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

1.2.2 Phương pháp tính

Ý tưởng chủ đạo của việc tính tích phân đường loại 2 là việc tham số hóa đường cong :

i) $x = x(t); y = y(t)$ $t_A \le t \le t_B$ *thì*

$$\int\limits_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_A}^{t_B} P[x(t),y(t)]x'_t dt + Q[x(t),y(t)]y'_t dt$$

ii) $y = y(x); x_A = a, x_B = b$

$$\int\limits_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} P[x,y(x)]dx + Q[x,y(x)]y'_x dx$$

Thí dụ 3.4. *Tính* $I = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} 2ydx - xdy$. *Trong đó* $A(3,0), B(0,2)$ *:*

i) theo đường thẳng;

ii) theo elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Giải:
i) Đường thẳng $AB : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 - 2\frac{x}{3}$.
Ta có $x_A = 2 < x < x_B = 0; dy = -\frac{2}{3}dx$.
Vậy $I = \int\limits_2^0 \left(4 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x\right) dx = \int\limits_2^0 \left(4 - \frac{2}{3}x\right) dx = 4x - \frac{x^2}{3} \, {}^0_2 = -8 + \frac{4}{3} = -\frac{20}{3}$
ii) Dạng tham số của elip: $\begin{cases} x = 3\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{cases} ; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = -3\sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\ dy = 2\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \end{cases}$
Từ đây ta có:
$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2.2\sin\varphi.(-3)\sin\varphi d\varphi - 3\cos\varphi.2\cos\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-6(\sin\varphi)^2 - 6\right) d\varphi$
$= \left(3\frac{\sin(2\varphi)}{2} - 9\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{11\pi}{4}$

Nhận xét 3.1. *Giá trị của tích phân đường loại 2 sẽ khác nhau khi lấy theo các dạng đường cong khác nhau . Vậy khi nào thì tích phân đường loại 2 không phụ thuộc vào dạng của đường cong .*

Định lý 3.2. *Định lý Green .*
Nếu P(x,y) và Q(x,y) có đạo hàm riêng liên tục trong D (kể cả biên) với $L = \partial D$ *thì*

$$\oint\limits_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} (Q'_x - P'_y)dxdy \tag{3.1}$$

Chiều vế trái là chiều dương đã biết .

Thí dụ 3.5. *Tính* $I = \oint\limits_L 2(x+1)dy - 3ydx$, *với* $\Gamma : x^2 + y^2 - 4y = 0$ *theo chiều dương.*
Áp dụng định lý Green, ta có:
$I = \iint\limits_D \left((2x+2)'_x - (3y)'_y\right)dxdy = 5\iint\limits_D dxdy = 5S_D = 5\pi 2^2 = 20\pi$

Từ định lý Green, ta suy ra hệ quả quan trọng sau :

Hệ quả 1. *P và Q có đạo hàm riêng liên tục trong* $D, \partial D$ *thì các điều sau là tương đương*

i) $Q'_x = P'_y, \forall(x,y) \in D$

ii) $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ *với mọi đường cong* L *kín trong* D.

iii) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *không phụ thuộc vào đường cong nối từ* A *đến* B *(không kín) mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối.*

iv) Tồn tại hàm thế $u(x,y)$ *có vi phân toàn phần* $du = Pdx + Qdy$ *. Khi đó* $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A)$

Chú thích 17. *Trong công thức (3.1), cho* $P = -y, Q = x$*, ta có:*
$\oint\limits_\Gamma xdy - ydx = 2\iint\limits_D dxdy$
Từ đây ta có công thức tính diện tích miền D *bởi tích phân trên biên của* D

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy - ydx \tag{3.2}$$

Trong hệ tọa độ cực $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi$, (3.2) *có dạng:*

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma \rho^2 d\varphi \tag{3.3}$$

2 Tích phân mặt

2.1 Tích phân mặt loại 1

2.1.1 Một số khái niệm

Định nghĩa 3.3. *Cho hàm số* $f(x,y,z)$ *xác định trên mặt* S *giới hạn bởi chu tuyến trơn từng khúc. Chia* S *một cách tùy ý thành* n *phần không dẫm nhau, diện tích mỗi phần là* $\Delta S_i, i = \overline{1,n}$ *. Trong mỗi* ΔS_i *ta lấy điểm* $M_i(x_i,y_i,z_i)$ *tùy ý và lập tổng tích phân:* $I_n = \sum\limits_{i=1}^n f(M(x_i,y_i,z_i))\Delta S_i$ *.*

Nếu $I = \lim\limits_{\max d(\Delta S_i)\to 0} \sum\limits_{i=1}^n f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$ *tồn tại hữu hạn , không phụ thuộc vào cách chia miền* S*, cách chọn điểm* M_i *, thì* I *được gọi là tích phân mặt loại một của hàm* $f(x,y,z)$ *trên* S*. Ký hiệu*

$$I = \iint\limits_S f(x,y,z)dS$$

.

Tích phân mặt loại một tồn tại nếu S là mặt trơn và $f(x, y, z)$ liên tục trên S.

Định lý 3.3. *Tích phân mặt loại một tồn tại nếu S là mặt trơn và hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên S.*

2.1.2 Phương pháp tính

a) *Chiếu S lên Oxy*
Xét S có phương trình $z = z(x, y)$ và S có hình chiếu trên Oxy là D. Gọi dS là yếu tố diện tích trên mặt S, $d\sigma$ là hình chiếu của dS trên mặt phẳng Oxy, ta có sự liên hệ:
$dS = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}d\sigma$. *Tích phân mặt loại một được tính theo công thức:* $I = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy$

b) *Nếu S có phương trình $y = y(x, z)$ và S có hình chiếu trên Oxz là D thì* $I = \iint\limits_D f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + {y'_x}^2 + {y'_z}^2}dxdz$

c) *Nếu S có phương trình $x = x(y, z)$và S có hình chiếu trên Oyz là D thì* $I = \iint\limits_D f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + {x'_y}^2 + {x'_z}^2}dzdy$

Thí dụ 3.6. *Tính*

$$\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$$

trong đó S là phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ nằm giữa các mặt phẳng $z = 0$ và $z = 1$.
Ta có $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Do vậy $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy.$
Lúc này, ta thu được tích phân bội 2:

$$I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{2}dxdy$$

, trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$. Suy ra

$$I = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$$

2.1.3 Ứng dụng của tích phân mặt loại 1

Diện tích mặt S là

$$S = \iint_S dS$$

Nếu mặt S có hàm mật độ khối lượng là $\rho(x, y, z)$ thì khối lượng của mặt S là:

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

Khi đó, tọa độ trọng tâm G của mặt S là:

$$x_G = \frac{1}{S} \iint_S x dS; y_G = \frac{1}{S} \iint_S y dS; z_G = \frac{1}{S} \iint_S z dS$$

2.2 Tích phân mặt loại 2

2.2.1 Một số khái niệm

Mặt trơn S được gọi là mặt định hướng nếu pháp vector đơn vị $\overrightarrow{n}$ xác định tại mọi điểm M thuộc S (có thể trừ biên S) biến đổi liên tục khi M chạy trên S. Mặt định hướng có hai phía, phía mà nếu đứng trên đó thì $\overrightarrow{n}$ hướng từ chân lên đầu là phía dương, ngược lại là phía âm. Hướng của biên S là hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ ngọn của $\overrightarrow{n}$.
Khi mặt S không kín, ta gọi phía trên là phía mà $\overrightarrow{n}$ lập với tia Oz góc nhọn, ngược là là phía dưới.
Khi mặt S kín ta gọi phía trong và phía ngoài. Mặt trơn từng khúc S là định hướng được nếu hai phần trơn bất kỳ của S nối với nhau bởi đường biên C có định hướng ngược nhau.

2.2.2 Định nghĩa tích phân mặt loại 2

Định nghĩa 3.4. *Xét mặt định hướng S với vecto pháp tuyến dương:*

$$\overrightarrow{n} = \cos\alpha \overrightarrow{i} + \cos\beta \overrightarrow{j} + \cos\gamma \overrightarrow{k}$$

Cho hàm số $\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{i}$, các hàm P, Q, R xác định trên mặt định hướng, trơn từng khúc S. Chia S một cách tùy ý thành n phần không dẫm lên nhau, diện tích mỗi phần là ΔS_i (i=1,2,...,n). Trong mỗi ΔS_i ta lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý. Gọi D_i là hình chiếu của ΔS_i

lên Oxy kèm theo dấu dương nếu ΔS_i có định hướng trên, ngược lại là dấu âm. Đại lượng

$$\Delta\Phi_i = \Delta S_i \left|\overrightarrow{F}(M_i)\right| \cos(\overrightarrow{n}(M_i, \overrightarrow{F})) = \Delta S_i \left[P\cos\alpha_i + Q\cos\beta_i + R\cos\gamma_i\right]$$

được gọi là thông lượng của vecto hàm $\overrightarrow{F}(M_i)$ đi qua mảnh nhỏ S_i.

Lập tổng

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \left[P\cos\alpha_i + Q\cos\beta_i + R\cos\gamma_i\right]$$

được gọi là giá trị gần đúng của thông lượng của veto hàm F đi qua mặt S. Nếu giới hạn tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia S và cách chọn điểm M_i thì số I được gọi là thông lượng của vecto hàm đi qua mặt S. Trong toán học giới hạn đó được gọi là tích phân mặt loại 2 của các hàm P, Q, R trên mặt S và được ký hiệu:

$$\iint_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right] dS$$

Do : $\cos\alpha dS = dydz, cos\beta dS = dzdx, cos\gamma dS = dxdy$

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dzdx$$

Chú thích 18. *Nếu S kín thì tích phân còn được ký hiệu là:*

$$\oiint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dzdx$$

Chú thích 19. *Nếu mặt S cho bởi phương trình dưới dạng ẩn thì các cosin chỉ phương của pháp tuyến mặt đó được xác định bởi:*

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}$$

Trong đó, dấu trước căn tương thích với phía của mặt.

2.2.3 Phương pháp tính

a) *Nếu S có hình chiếu đơn trị lên Oxy là miền Dxy và có phương trình $z = z(x, y)$ thì:*

$$\iint_S R(x,y,z)dS = \pm \iint_{D_{Oxy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

dấu '+' hay dấu '-' tùy thuộc vào mặt phía trên hay phía dưới.

b) *Nếu S có hình chiếu đơn trị lên Oxz là miền Dxz và có phương trình $y = y(x, z)$ thì:*

$$\iint_S R(x,y,z)dS = \pm \iint_{D_{Oxz}} R(x,y,z(x,y))dxdz$$

c) *Nếu S có hình chiếu đơn trị lên Oyz là miền Dxz và có phương trình $y = y(x, z)$ thì:*

$$\iint_S R(x,y,z)dS = \pm \iint_{D_{Oyz}} R(x,y,z(x,y))dydz$$

Thí dụ 3.7. *Tính tích phân $I = \iint\limits_S x^2y^2z^2dxdy$, trong đó S là nửa mặt cầu dưới $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0$.*

Ta có:

$I = \iint\limits_S x^2y^2(R^2 - x^2 - y^2)dxdy = R^2 \iint\limits_S x^2y^2dxdy - \iint\limits_S x^4y^2dxdy - \iint\limits_S x^2y^4dxdy$

$= R^2 \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^2d\varphi \int\limits_0^R r^5dr - \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi)^4(\sin\varphi)^2d\varphi \int\limits_0^R r^7dr$

$- \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^4d\varphi \int\limits_0^{R^7} dr = \frac{\pi}{96}R^8$

Công thức Stokes

Định lý 3.4. *Cho S là mặt định hướng trơn từng khúc có biên S trơn từng khúc và không tự cắt. Giả sử P, Q, R là các hàm có đạo hàm riêng liên tục trong miền mở chứa S. Khi đó:*

$$\oint_{dS} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S [(R'_y - Q'_z)\, cos\alpha + (P'_z - R'_x)\, cos\beta + (Q'_x - P'_y)\, cos\gamma]dS$$

(Tích phân S lấy theo phía ngoài của S).

Thí dụ 3.8. *Tính* $I = \oint\limits_C x^2y^3dx + dy + zdz$, *với* C *là vòng tròn* $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$.

Theo công thức Stokes, ta có:

$$I = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS$$

Từ đây, ta thu được $I = -\iint\limits_S 3x^2y^2\cos\gamma dS$. *Trong đó* $dS\cos\gamma = dxdy$.

Đặt $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, *ta được:*
$I = -3\iint\limits_D r^5(\sin\varphi)^2(\cos\varphi)^2 drd\varphi = -\frac{\pi r^6}{8}$.

Công thức Gauss – Ostrogradski

Định lý 3.5. *Cho V là một khối giới nội với biên S trơn từng khúc. Giả sử P, Q, R là các hàm có đạo hàm riêng liên tục trong miền mở chứa V. Khi đó:*

$$\oiint_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)dS = \iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right] dxdydz$$

Thí dụ 3.9. *Tính*

$$\oiint_S (xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma)dS$$

theo mặt của một vật nào đó.
Theo công thức Gauss-Oxtrogradski, ta có:

$$\oiint_S (xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma)dS$$

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z}\right) dxdydz = 3\iiint\limits_V dxdydz = 3V$$

Thí dụ 3.10. *Chuyển tích phân mặt*

$$\oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}dydz + \frac{\partial u}{\partial y}dxdz + \frac{\partial u}{\partial z}dydx$$

sang tích phân bội.
Viết lại tích phân đã cho như sau:

$$\oiint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS$$

, theo công thức Gauss-Oxtrogradski, ta có:

$$\iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] dxdydz =$$

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dxdydz$$

2.3 Lý thuyết trường [1]

Nếu vecto $\vec{F}$ là hàm vecto của điểm trong không gian

$$F = F(M) = F(r), r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

thì vecto đó xác định trường vecto. Dưới dạng tọa độ:

$$F = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

trong đó P, Q, R lần lượt là hình chiếu của F lên các trục tọa độ.
Dive của trường F là số:

$$div = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Rota (xoáy) của trường F là vecto

$$rotF = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

[1] Sinh viên tham khảo.

Dòng của trường vecto $F(M)$ qua mặt S vào phía được xác định bởi vecto phap tuyến đơn vị $\overrightarrow{n} = \cos\alpha \overrightarrow{i} + \cos\beta \overrightarrow{j} + \cos\gamma \overrightarrow{k}$ của mặt S là tích phân mặt:

$$\iint_S FndS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

.
Công thức Gauss-Oxtrogradski dưới dạng vecto:

$$\oiint\limits_S FndS = \iiint_V divFdV$$

tức là tích phân của dive của trường vecto F theo thể tích V bằng dòng của vecto qua mặt S bao thể tích này.
Tích phân tuyến tính của F dọc theo đường cong L là tích phân đường:

$$\int\limits_L Fdr = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$$

đây là công của trường vecto dọc theo đường cong L. Nếu L kín, thì tích phân tuyến tính

$$\oint\limits_C Fdr = \oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$$

được gọi là lưu số của trường vecto F(M) dọc theo chu tuyến C.
Công thức Stokes dưới dạng vecto có dạng:

$$\oint_C Fdr = \iint_S nrotFdS$$

tức là lưu số của vecto dọc theo chu tuyến của một mặt nào đó bằng dòng của rota qua mặt đó.

3 Bài tập

3.1. *Tính các tích phân đường loại 1:*

1. $I = \int\limits_\Gamma (x+y)dl$, Γ *có phương trình* $x + y = 1, 0 \leq x \leq 1$

2. $I = \int\limits_\Gamma (x+y)^2 dl$, Γ *có phương trình* $x + y = a, 0 \leq x \leq a$

3. $I = \int\limits_{\Gamma} xydl$, Γ *là chu vi hình chữ nhật* $A(2,0); B(2,1); C(0,1); O(0,0)$.

4. $I = \int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)dl$, Γ *có phương trình* $x^2 + y^2 = a^2$.

5. $I = \int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}dl$, Γ *có phương trình* $x^2 + y^2 = a^2$ *ở góc phần tư thứ nhất.*

6. $I = \int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}dl$, Γ *có phương trình* $x^2 + y^2 = 2ax$.

7. $I = \int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}dl$, Γ *có phương trình* $(x^2 + y^2)^{3/2} = a^2(x^2 - y^2)$.

8. $I = \int\limits_{\Gamma} y^2dl$, Γ *có phương trình dạng tham số* $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$

9. $I = \int\limits_{\Gamma} (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dl$, Γ *là cung* $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, 0 \leq x \leq 2\pi$

10. $I = \int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2)dl$, Γ *là cung* $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$

3.2. *Tính các tích phân đường loại 2 sau:*

1. $I = \int\limits_{\Gamma} (2xy + 4x^3 + 1)dx - (2xy + 4y^2 - 1)dy$, Γ *là đường* $x = 2$ *đi từ* $A(2,2)$ *đến* $B(2,0)$.

2. $I = \int\limits_{\Gamma} (y + 2x)dx + (y - x)dy$, Γ *là đường* $y = -x+1$ *đi từ* $A(0,1)$ *đến* $B(1,0)$.

3. $I = \int\limits_{\Gamma} 2xydx + x^2dy$, Γ *là đường* $x + y = 1$ *đi từ* $O(0,1)$ *đến* $A(1,0)$.

4. $I = \int\limits_{\Gamma} (xy^2 - 1)dx + (yx^2 + 3)dy$, Γ *là đường* $y = 2x^2$ *đi từ* $A(-1,1)$ *đến* $B(1,1)$.

5. $I = \int\limits_{\Gamma} (2x + y)dx + (4y + x)dy$, Γ *là đường* $y^3 = x$ *đi từ* $O(0,0)$ *đến* $A(1,1)$.

6. $I = \int\limits_{\Gamma} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, Γ *là đường* $y = x^2$ *đi từ* $A(-1,1)$ *đến* $B(1,1)$.

7. $I = \int\limits_{\Gamma} y^2dx - x^2dy$, Γ *là đường nửa trên elip* $x = a\cos t, y = b\sin t$ *hướng cùng chiều kim đồng hồ.*

8. $I = \int\limits_{\Gamma} 2xdx + ydy + (x+y-1)dz$,Γ *là đoạn thẳng nối* $A(1,1,1)$ *đến* $B(2,3,4)$.

9. $I = \oint\limits_{\Gamma} (x+y)dx + (x-y)dy$,$\Gamma = \{(x,y)/(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2\}$.

10. $I = \oint\limits_{\Gamma} (x+y+3)dx + (3-3y+5)dy$,Γ *là đường tròn tâm* $O(0,0)$*, bán kính* R.

11. $I = \oint\limits_{\Gamma} (2x+y)dx + (2x-y)dy$,Γ *là elip* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$.

12. $I = \oint\limits_{\Gamma} y(\sin x + 1)dx + (x - \cos x)dy$,Γ *là elip* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

3.3. *Tính các tích phân mặt loại 1 sau:*

1. $I = \iint\limits_{S} ds$*, trong đó* S *là mặt:* $z = 3,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.

2. *Tính* $I = \iint\limits_{S} (2x - 2y + z)\, ds$*,trong đó* S *là mặt:* $2x - 2y + z - 2 = 0$, $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$.

3. $I = \iint\limits_{S} ds$*, trong đó* S *là mặt:* $z = 2x,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.

4. $I = \iint\limits_{S} xyds$*, trong đó* S *là mặt:* $z = 2x,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.

5. $I = \iint\limits_{S} (xy + y^2 + yz)\, ds$*, trong đó* S *là mặt:* $x + y + z = 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 2$

6. *Tính diện tích* S *của mặt* $2x - 2y + z = 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 2$

7. *Tính diện tích* S *của mặt* $x^2 + y^2 \le 2x, z = 2$

8. *Tính diện tích* S *của mặt* $z = 2x + 2y, x^2 + y^2 \le 4x$

9. *Tính diện tích* S *của mặt* $x^2/4 + y^2/9 \le 1, z = 2$

10. *Tính diện tích* S *của mặt* $2x - 2y + z = 3, x^2/4 + y^2 \le 1$

3.4. *Tính các tích phân mặt loại 2 sau:*

1. *Tính tích phân mặt* $I = \iint\limits_{S} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *trong đó* S *là mặt dưới của mặt* $x^2 + y^2 \le 9, z = 4$.

2. *Tính tích phân mặt* $I = \iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *trong đó S là mặt định hướng với pháp vector đơn vị dương* $(3/5, 0, -4/5)$ *của mặt* $3x - 4z = 4, x^2 + y^2 \leq 9$.

3. *Tính tích phân mặt* $I = \iint\limits_S (x - y + z)dxdz$ *trong đó S là mặt* $x - y + z = 0, x^2 + z^2 \leq 1$ *ứng với pháp vector đơn vị dương* $\vec{n} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

4. *Tính tích phân mặt* $I = \iint\limits_S (2x + 2y - z)dxdy$ *trong đó S là mặt* $2x + 2y - z = 1, 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ *ứng với pháp vector đơn vị dương* $\vec{n} = (2/3, 2/3, -1/3)$.

5. *Tính tích phân mặt* $I = \iint\limits_S dxdy$ *trong đó S là mặt dưới của mặt* $x^2/4 + y^2/9 \leq 1, z = 2$.

6. *Tính* $I = \iint\limits_S dydz$ *trong đó S là mặt định hướng với pháp vector đơn vị dương (0, 3/5, 4/5) của mặt* $3y + 4z = 2, x^2/4 + y^2/9 \leq 1$.

7. *Tính tích phân mặt* $I = \iint\limits_S x^2 dydz$ *trong đó S là mặt trên của mặt* $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

8. *Tính tích phân mặt* $I = \iint\limits_S dxdy$ *trong đó S là mặt trên của mặt* $x^2/4 + y^2/9 \leq 1, z = -3$.

9. *Tính tích phân mặt* $I = \iint\limits_S dxdy$ *trong đó S là mặt dưới của mặt* $x^2/9 + y^2/25 \leq 1, z = 2$.

10. *Tính tích phân mặt* $I = \iint\limits_S dxdy$ *trong đó S là mặt dưới của mặt* $x^2 + y^2/9 \leq 1, z = 2$.

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1 Khái niệm về phương trình vi phân

Phương trình chứa đạo hàm hoặc vi phân của một hoặc vài hàm cần tìm được gọi là phương trình vi phân.
Cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình vi phân được gọi là cấp của phương trình vi phân đó.
Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp n là:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{4.1}$$

Nghiệm *của (4.1) trên khoảng D nào đó là hàm $y = \varphi(x)$ xác định trên D sao cho khi thay $y = \varphi(x)$ vào (4.1), ta được đồng nhất thức trên D.*
Nghiệm tổng quát*: Phương trình vi phân nếu có nghiệm thì sẽ có vô số nghiệm sai khác nhau một hằng số C.*
Nghiệm riêng *: nghiệm tổng quát ứng với hằng số $C = C_0$ cụ thể (thường ứng với một điều kiện nào đấy).*
Giải phương trình vi phân là đi tìm tất cả các nghiệm của phương trình vi phân đó.

Chú thích 20. *Nếu ẩn hàm cần tìm có từ hai biến trở lên , ta gọi là phương trình đạo hàm riêng.*

2 Phương trình vi phân cấp 1

2.1 Khái niệm

Định nghĩa 4.1. *Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng tổng quát*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{4.2}$$

.
Nếu từ (4.2) ,ta giải được theo y thì (4.2) trở thành $y' = f(x, y)$.
Nghiệm của (4.2) có dạng $y = y(x, C)$ chứa hằng số C được gọi là nghiệm tổng quát. Khi thế điều kiện $y_0 = y(x_0)$ cho trước (thường gọi là điều kiện đầu) vào nghiệm tổng quát ta được giá trị $C = C_0$ cụ thể và nghiệm lúc này được gọi là nghiệm riêng của (4.2).
Nghiệm thu được trực tiếp từ (4.2) và không thỏa nghiệm tổng quát được gọi là nghiệm kỳ dị của (4.2).

Chú thích 21. *Bài toán tìm nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện $y_0 = y(x_0)$ còn được gọi là bài toán điều kiện đầu hay là bài toán Cauchy.*

Định lý 4.1. *Giả sử hàm số $f(x, y)$ xác định và liên tục trong một lân cận U của điểm $M(x_0, y_0)$ và tồn tại một hằng số $K > 0$ sao cho:*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \forall(x, y_1), (x, y_2) \in U.$$

Khi đó tồn tại một giá trị $\delta > 0$ đủ nhỏ sao cho trong khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tồn tại duy nhất nghiệm $y = \varphi(x)$ của phương trình (4.2) thoả mãn điều kiện ban đầu $y_0 = y(x_0)$.

Thí dụ 4.1. *Giải phương trình vi phân $y' - x = 0$, biết nghiệm thỏa mãn điều kiện $y(2) = 1$.*
Ta có: $y' - x = 0 \Rightarrow y' = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C$.
Thế $x = 2; y = 1$ vào biểu thức y, ta được $C = -1$.
Vậy $y = \frac{x^2}{2} - 1$.

2.2 Một số phương trình vi phân cấp 1

2.2.1 Phương trình vi phân cấp 1 với biến phân ly

Phương trình vi phân với biến phân ly có dạng:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \tag{4.3}$$

Phương pháp giải :
Lấy tích phân hai vế của (4.3), ta được nghiệm tổng quát:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

.

Thí dụ 4.2. *Giải phương trình vi phân*

$$\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{y}{y^2+1}dy = 0$$

Giải. *Ta có:*

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{y}{y^2+1}dy = C$$
$$\ln(x^2+1) + ln(y^2+1) = 2C = \ln C^*$$

Vậy

$$(x^2+1)(y^2+1) = C^*$$

Thí dụ 4.3. *Giải phương trình vi phân*

$$y' = xy(x+1),\ \textit{thỏa điều kiện } y(1) = 1$$

Ta có

$$\frac{dy}{dx} = xy(x+1) \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x(x+1)} = 0$$
$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x(x+1)} = C \Rightarrow \ln|y| - \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = C$$

Thế điều kiện đầu vào, ta được $C = \ln 2$.
Nghiệm bài toán $\ln|y| - \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln 2$

Chú thích 22. [1] *Phương trình dạng* $\frac{dy}{dx} = f(ax+by)$ *có thể đưa về phương trình phân ly biến số bằng cách đổi biến* $z = ax + by$.

[1] Bài tập

2.2.2 Phương trình vi phân đẳng cấp

Định nghĩa 4.2. *(Hàm đẳng cấp hai biến số)*
Hàm hai biến $f(x, y)$ được gọi là đẳng cấp bậc n nếu với mọi $\lambda > 0$, ta có $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

Thí dụ 4.4. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ *là hàm đẳng cấp cấp 0;*
$f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$ *là hàm đẳng cấp cấp 1.*

Định nghĩa 4.3. *Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1 có dạng:*

$$y' = f(x, y) \tag{4.4}$$

Trong đó, $f(x, y)$ là hàm số đẳng cấp bậc 0.

Phương pháp giải
Ta đưa (4.4) $\Leftrightarrow y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ Đổi biến số $u = \frac{y}{x}$, ta đưa phương trình (4.4) về dạng phương trình có biến phân ly.
Giải phương trình tìm u, rồi tìm y.

Thí dụ 4.5. *Giải phương trình $y' = \frac{x+y}{x-y}$, thỏa mãn điều kiện $y(1) = 0$.*
Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$
Phương trình trở thành $u'x + u = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow u'x = \frac{1+u^2}{1-u}$

$$\frac{1-u}{1+u^2}du - \frac{1}{x}dx = 0 \Rightarrow \int \frac{1-u}{1+u^2}du - \int \frac{1}{x}dx = C$$

$$\Leftrightarrow \text{arctanu} - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) - ln\,|x| = C$$

Thế điều kiện đầu, ta được $x = 1, y = 0 \Rightarrow C = 0$.
Vậy nghiệm $x\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = e^{\arctan\frac{y}{x}}$

Chú thích 23. [2] *Phương trình dạng $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), ab_1 \neq a_1b$ có thể đưa vềphương trình thuần nhất bằng cách đổi biến $x = x_0 + u, y = y_0 + u$, với (x_0, y_0) là nghiệm của hệ*

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

[2] Bài tập

2.2.3 Phương trình vi phân toàn phần

Cho hai hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ *và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền mở D, thỏa điều kiện* $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y), \forall (x,y) \in D$. *Nếu tồn tại hàm* $u(x,y)$ *sao cho* $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *thì phương trình vi phân có dạng:*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{4.5}$$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần.
Nghiệm tổng quát của (4.5) *là* $u(x,y) = C$.

$$u'_x = P(x,y); u'_y = Q(x,y)$$

ta có phương pháp giải như sau:

$$\begin{cases} u'_x = P(x,y) \\ u'_y = Q(x,y) \end{cases}$$

Xuất phát từ $u'_x = P(x,y)$, *ta có* $u(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y)$
Sau đó lấy đạo hàm riêng theo y của $u(x,y)$ *với chú ý* $u'_y = Q(x,y)$, *ta tìm được* $C(y)$.

Thí dụ 4.6. *Cho phương trình* $(x + xy^2)dx + (yx^2 - y + 1)dy = 0$
Ta có:

$$\begin{cases} P(x,y) = x + xy^2 \\ Q(x,y) = yx^2 - y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 2xy \\ Q'_x = 2xy \end{cases}$$

vậy đây là phương trình vi phân toàn phần.
Từ

$$u'_x = x + xy^2 \Rightarrow u(x,y) = xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y)$$

$$\Rightarrow u'_y = x + x^2y + C'(y) = Q(x,y) = yx^2 + y + 1$$

$$\Rightarrow C'(y) = y - x - 1 \Rightarrow C(y) = \frac{y^2}{2} - xy + y + C_1$$

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}x^2y^2 + y$$

Chú thích 24. *Ta có thể tìm được hàm* $u(x,y)$ *thông qua một trong hai công thức sau:*

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C$$

trong đó C *là hằng số.*

2.2.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4.6}$$

Cách giải:
Từ phương trình đã cho $\Rightarrow e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y = e^{\int p(x)dx}q(x)$
$\Rightarrow \left(e^{\int p(x)dx}y\right)' = e^{\int p(x)dx}q(x) \Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$

Chú thích 25. *Khi tính các tích phân trên, ta chọn hằng số là 0.*
Phương pháp biến thiên hằng số là đi tìm nghiệm tổng quát của (4.6) dưới dạng: $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$

Thí dụ 4.7. $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$
Nhân tử tích phân $A(x) = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}$.
Nhân 2 vế của phương trình vi phân đã cho cho $A(x)$: $e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x^3}y\right) = 6x^2e^{x^3}$
Lấy tích phân 2 vế:

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}dx = 2\int e^{x^3}d(x^3) = 2e^{x^3} + C \Rightarrow y = 2 + Ce^{-x^3}.$$

2.2.5 Phương trình Bernoulli

Phương trình vi phân Bernoulli có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \tag{4.7}$$

Chú thích 26. *Khi* $\alpha = 1$, *(4.7) trở thành phương trình có biến số phân ly; Khi* $\alpha = 0$,*(4.7) trở thành phương trình tuyến tính cấp 1.*

Phương pháp giải:

i) Với $y \neq 0$ *, ta chia hai vế cho* y^{α}*:*
$\Rightarrow y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$

ii) Đổi biến $Z = y^{1-\alpha} \Rightarrow Z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$
Phương trình trở thành $Z' + (1-\alpha)p(x)Z = (1-\alpha)q(x)$, ta thu được phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 theo Z.

Thí dụ 4.8. $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$.
Chia cả hai vế cho $y^2 \Rightarrow y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = x$.
Đặt $Z = y^{-1} \Rightarrow Z' = -y^{-2}y'$.
Phương trình trở thành $Z' - \frac{1}{x}Z = -x$.
Giải ra, ta được $Z = x(-x + C) \Rightarrow \frac{1}{y} = x(-x + C)$

3 Phương trình vi phân cấp 2

3.1 Phương trình vi phân cấp 2 khuyết

3.1.1 Phương trình khuyến y và y'

Dạng phương trình

$$y'' = f(x)$$

Cách giải :
Lấy tích phân hai lần, ta được nghiệm.

Thí dụ 4.9. *Xét phương trình $y'' = x$ Ta có*

$$y'' = x \Rightarrow y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

3.1.2 Phương trình khuyết y

Có dạng :

$$y'' = f(x, y')$$

Cách giải: Đặt $z = y'$, ta đưa phương trình về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp một theo z, giải tìm z rồi suy ra y.

Thí dụ 4.10. *Xét phương trình $y'' - \frac{y'}{x} = x^2$ Đặt $z = y' \Rightarrow z'' = y'$. Phương trình trở thành $z' - \frac{z}{x} = x^2$.*
Giải ra ta được nghiệm:$z = \frac{x^3}{2} + C_1x$.
Từ đây, ta có $y = \int \left(\frac{x^3}{2} + C_1x\right)dx = \frac{x^4}{8} + C_1\frac{4x^2}{8} + C_2$.

3.1.3 Phương trình khuyết x

Có dạng:

$$y'' = f(y, y')$$

Cách giải: Đặt $z = y'$, ta có:

$$y'' = z' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành phương trình vi phân với biến số phân ly

3.2 Phương trình vi phân cấp hai với hệ số hằng

3.2.1 Phương trình thuần nhất

Dạng phương trình

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{4.8}$$

Phương pháp giải:
Ta xét phương trình đặc trưng của (4.8)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{4.9}$$

Nghiệm của (4.8) tùy thuộc vào dạng nghiệm của (4.9), ta có các trường hợp sau:

i) *(4.9) có 2 nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2, khi đó (4.8) có 2 nghiệm riêng $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$ và nghiệm tổng quát:*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

ii) *(4.9) có nghiệm kép thực λ, khi đó (4.8) có 2 nghiệm riêng $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$ và nghiệm tổng quát:*

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

iii) *(4.9) có 2 nghiệm phức liên hợp $\lambda = \alpha \pm \beta i$, khi đó (4.8) có 2 nghiệm riêng $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ và nghiệm tổng quát:*

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Thí dụ 4.11. *Giải các phương trình sau:*
i) $y'' - 3y' + 2y = 0$;
ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
iii) $y'' - 2y' + 2y = 0$;
Giải:
i) Phương trình đặc trưng tương ứng: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
có 2 nghiệm riêng $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$*, nên phương trình đã cho có 2 nghiệm riêng* $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x}$.
ii) Tương tự câu i): $y(x) = C_1e^x + xC_2e^x$;
iii) Tương tự câu ii): $y(x) = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x$

Thí dụ 4.12. *Tìm nghiệm của phương trình* $y'' + 3y' + 2y = 0$ *thỏa mãn điều kiện sau:* $y(0) = 1; y'(0) = 3$.
Giải: Ta có nghiệm tổng quát của bài toán: $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.
Từ điều kiện, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = 1 \\ -C_1 - 2C_2 & = 3 \end{cases}$$

Giải hệ, ta được $C_1 = 5, C_2 = -4$.
Vậy nghiệm của hệ: $y(x) = 5e^{-x} - 4e^{-2x}$

3.3 Phương trình vi phân cấp hai không thuần nhất

Dạng phương trình:

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{4.10}$$

Định lý 4.2. *Giả sử* $y_R(x)$ *là một nghiệm riêng của (4.10) và* $y_{TQ}(x)$ *là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (tức là nghiệm của phương trình (4.8)). Khi đó nghiệm tổng quát của (4.10) là tổng:*

$$y(x) = y_R + y_{TQ}$$

Thí dụ 4.13. *Cho phương trình* $y'' - 2y' + 2y = xe^x$

i) Chứng minh $y(x) = xe^x$ *là một nghiệm riêng của phương trình;*

ii) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình;

Giải:
i) Ta có: $y'' = 2e^x + xe^x; y' = e^x + xe^x$*, từ đây ta có:* $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.
ii) Xét phương trình thuần nhất $y'' - 2y' + 2y = 0$ *, ta có nghiệm tổng quát:* $y(x) = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x$.

Áp dụng định lý cộng nghiệm, ta được nghiệm tổng quát của phương trình: $y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + xe^x$.

Định lý 4.3. *(nguyên lý chồng nghiệm) Xét phương trình vi phân*

$$y'' + ay' + by = f(x) + g(x) \tag{4.11}$$

Nếu $y_1(x)$ *là một nghiệm của phương trình vi phân*

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

và nếu $y_2(x)$ *là một nghiệm của phương trình vi phân*

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

thì hàm $y = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ *là nghiệm của phương trình* (4.11)

Để giải phương trình không thuần nhất, ngoài việc tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, ngoài ra ta cần tìm thêm một nghiệm riêng của nó giống như nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Dưới đây là một số phương pháp tìm nghiệm riêng.

3.3.1 Phương pháp hệ số bất định (The method of undetermined coefficients)[3]

Phương pháp này áp dụng cho phương trình với $f(x)$ *có các dạng đặc biệt:*

Hàm $f(x)$	*Dạng tổng quát của* $f(x) : y = \varphi(x)$
x	$Ax+B$
x^2	$Ax^2 + Bx + C$
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$
$\sin\beta x$	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$
$\cos\beta x$	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$

Thí dụ 4.14. *Tìm nghiệm riêng của phương trình* $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.
Ta có nghiệm riêng dạng $y(x) = Ae^{2x}$.
Lấy đạo hàm các cấp rồi thế vào vế trái, ta được:
$9Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = \frac{1}{9}$.
Vậy một nghiệm riêng của phương trình $y(x) = \frac{1}{9}e^{2x}$.

Thí dụ 4.15. *Tìm nghiệm riêng của phương trình* $y'' + 2y + y = x^2 - x$.
Nghiệm riêng có dạng: $y(x) = Ax^2 + Bx + C$.
Lấy đạo hàm các cấp, thế vào vế trái, ta được:

[3] Phần này sinh viên tham khảo

$Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B + C = x^2 - x$. *Đồng nhất hệ số, ta thu được:*

$$\begin{cases} A & = 1 \\ 4A + B & = -1 \\ 2A + 2B + C & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -5 \\ C = 8 \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình $y(x) = x^2 - 5x + 8$.

Thí dụ 4.16. *Tìm nghiệm tổng quát của phương trình* $y'' + 2y' + y = e^{2x} + x^2 - x$.
Xét phương trình thuần nhất: $y'' + 2y' + y = 0$, *có nghiệm tổng quát tương ứng* $y(x) = C_1e^{-x} + xC_2e^{-x}$.
Nghiệm riêng tương ứng của phương trình $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ *là* $y_{R1} = \frac{1}{9}e^{2x}$
Nghiệm riêng tương ứng của phương trình $y'' + 2y' + y = x^2 - x$ *là* $y_{R2} = x^2 - 5x + 8$.
Do vậy, ta có nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:
$y = C_1e^{-x} + xC_2e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x} + x^2 - 5x + 8$.

Chú thích 27. *Nếu hàm* $f(x)$ *là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng. Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng* $y(x) = x\varphi(x)$, *hoặc* $y(x) = x^2\varphi(x)$

3.3.2 Phương pháp biến thiên hằng số (The method of variation of Parameters)

Khi hàm $f(x)$ *của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất không có dạng đặc biệt như đã đề cập trong trường hợp ở trên, ta tìm nghiệm theo phương pháp biến thiên hằng số như sau:*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

trong đó $y_1(x), y_2(x)$ *độc lập tuyến tính,* C_1, C_1 *là hàm số theo biến* x.
Để tìm C_1, C_2, *ta thêm điều kiện:*

$$C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = 0 \tag{4.12}$$

Với điều kiện trên, lần lượt lấy đạo hàm cấp 1, 2 và thế vào phương trình không thuần nhất, ta được hệ sau:

$$\begin{cases} C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \\ C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \end{cases}$$

4 Bài tập

4.1. *Giải các phương trình vi phân sau*

1. $y' - (x^2 + x)y = 0; y(0) = 1.$
2. $(1 + x^2)y' - xy = 0; y(0) = 1.$
3. $(1 + e^{x^2})y' - xy = 0; y(0) = 1.$
4. $(1 + cos^2 x)y' - \sin x(y + 1) = 0; y(0) = 1.$
5. $x^2(y^2 + 1)y' - \frac{x}{1+x^4}y = 0; y(0) = 1.$
6. $(4 + x^2)y' - y(y - 1) = 0; y(0) = 1.$
7. $\frac{y'}{y+1} - \frac{1}{x(x+1)}y = 0; y(0) = 1.$
8. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y' - x\sqrt{1 - y^2} = 0; y(0) = 1.$
9. $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}y' - \frac{x}{y} = 0; y(0) = 1.$
10. $e^{x^2+y}y' - \frac{x}{y} = 0; y(0) = 1.$

4.2. *Giải các phương trình sau*

1. $y' - \frac{1}{x}y = x; y(0) = 1.$;
2. $y' - \frac{2}{x}y = x; y(0) = 1.$
3. $y' - xy = x^2; y(0) = 1.$
4. $y' - \frac{1}{x}y = e^x; y(e) = 1.$
5. $(x + 1)y' - y = x; y(0) = 1.$
6. $x^2y' - y = 1; y(0) = 1.$
7. $y' - \frac{x}{1+x^2}y = x; y(0) = 1.$
8. $y' - \frac{1}{x \ln x}y = \frac{1}{x}; y(0) = 1.$
9. $y' - y = x^2 - 3x; y(0) = 1.$
10. $y' - y = xe^x; y(0) = 1.$

4.3. *Giải các phương trình vi phân sau:*

1. $(e^x y + e^y)dx + (e^x + e^y x)dy = 0;$
2. $\cos(x)ydx + (\sin(x) + e^y)dy = 0;$
3. $(2xy + e^y)dx + (x^2 + e^y x)dy = 0;$
4. $\left(ln(y+1) + \frac{e^y}{x}\right)dx + \left(\frac{x}{y+1} + \frac{e^y}{x}\right)dy = 0;$
5. $\left(\arctan y + \frac{y}{1+x^2}\right)dx + \left(\frac{x}{1+y^2} + \arctan x\right)dy = 0;$
6. $\left(\arcsin y + \frac{y}{1+x^2}\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arctan x\right)dy = 0;$
7. $\left(\frac{2xy}{1+x^2} + 2x\ln(1+y)\right)dx + \left(ln(1+x^2) + \frac{x^2}{1+y}\right)dy = 0;$
8. $(-2x\sin(x^2+y) + e^y)\,dx + (-sin(x^2+y) + e^y x)\,dy = 0;$
9. $\left(\frac{2xy}{1+x^4y^2} + ye^{xy}\right)dx + \left(\frac{x^2}{1+x^4y^2} + xe^{xy}\right)dy = 0;$
10. $\left(\frac{1}{x+y} + 2x\sin y\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + x^2\cos y\right)dy = 0$.

4.4. *Giải các phương trình sau*

1. $y'' + 3\frac{y'}{x} = 0;$
2. $y'' + \frac{y'}{x} = 0;$
3. $y'' + 4\frac{y'}{x} = 0;$
4. $y'' - 2\frac{y'}{x} = 0;$
5. $e^{2x} - 4 = 0;$
6. $y'' + \frac{1}{cos^2 x} = 0;$
7. $y'' = \cos x;$
8. $y''\cos^2 x - 1 = 0;$
9. $y'' - \frac{4x}{(4+x^2)^2} = 0;$

4.5. *Giải các phương trình sau*

1. $y'' - 2y' + 5y = 0;$

2. $y'' + 4y = 0$;
3. $y'' - 3y' + 2y = 0$;
4. $y'' - y = 0$;
5. $y'' - 8y' + 14y = 0$;
6. $y'' - 6y' + 9y = 0$;
7. $4y'' - 16y = 0$;
8. $y'' - 22y' + 121y = 0$;
9. $y'' + 4y' + 3y = 0$;
10. $3y'' + 18y' + 27y = 0$;
11. $y'' - 2y' + 10y = 0$;

4.6. *Giải các bài toán sau:*

1. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}; y(0) = 3; y'(0) = 9;$
2. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}; y(0) = 0; y'(0) = 1;$
3. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x;$
4. $y'' + y = \cos 3x; y(\pi/2) = 4; y'(\pi/2) = 1;$
5. $y'' + 9y = 2\sin x \sin 2x; y(0) = y'(\pi/2) = 0;$
6. $y'' - y = x\cos^2 x;$
7. $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1;$
8. $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x};$

Tài liệu tham khảo

[1] Ngô Thành Phong, Giáo trình giản yếu giải tích toán học, ĐHKHTN Tp. Hồ Chí Minh, 2001.

[2] Nguyễn Phú Vinh, Toán Cao cấp A3, ĐH Công Nghiệp Tp. Hồ Chí Minh, 2009.

[3] Nguyễn Phú Vinh, Ngân hàng câu hỏi trắc nghiệm toán cao cấp tập 1, 2, ĐH Công Nghiệp Tp. HCM, 2010.

[4] P.E.Đankô, A.G. Popôp, T.la.Côgiepnhicôva, Bài tập toán cao cấp , phần ii, NXB "Mir" Maxcơva, 1983.

[5] James Stewart, Calculus Early Transcendentals, Seventh Edition, 2012, Printed in the United States of America