ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Ths. Ngô Quốc Nhàn

BÀI GIẢNG
TOÁN CAO CẤP A2

Hệ Đại Học
Ngành:
Thời lượng giảng dạy: 45 tiết.

TP.HỒ CHÍ MINH-2016

Mục lục

Chương 1

MA TRẬN- ĐỊNH THỨC

1 Ma trận

1.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 1.1. *Ma trận A cấp* $m \times n$ *trên* $\mathbb{R}$ *là 1 hệ thống gồm* $m \times n$ *số* $a_{ij} \in \mathbb{R} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ *và được sắp thành bảng gồm m dòng và n cột:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Trong đó: Các số a_{ij} *được gọi là các phần tử của A ở dòng thứ i và cột thứ j.*
Cặp số (m, n) được gọi là kích thước của A.

Chú thích 1. **i)** *Khi* $m = 1$*, ta gọi:* $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad ... \quad a_{1n})$ *là ma trận dòng.*

ii) *Khi* $n = 1$*, ta gọi* $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ *là ma trận cột.*

iii) *Khi* $m = n = 1$*, ta gọi:* $A = (a_{11})$ *là ma trận gồm 1 phần tử.*

iv) *Tập hợp các ma trận A được ký hiệu là* $M_{m,n}(\mathbb{R})$*, để cho gọn ta viết là* $A = (a_{ij})_{m \times n}$*.*

Định nghĩa 1.2. *Ma trận* $O = (0_{ij})_{m \times n}$ *có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là ma trận không.*

Định nghĩa 1.3. *(Ma trận vuông)*

i) Khi $m = n$*, ta gọi A là ma trận vuông cấp n. Ký hiệu là* $A = (a_{ij})_n$*.*

ii) Đường chéo chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ được gọi là đường chéo chính của $A = (a_{ij})_n$, đường chéo còn lại được gọi là đường chéo phụ.

Thí dụ 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 1.4. *(Ma trận chéo)*
Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận chéo.

Thí dụ 1.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *là ma trận chéo.*

Định nghĩa 1.5. *(Ma trận đơn vị) Ma trận chéo cấp n gồm tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ma trận đơn vị cấp n. Ký hiệu là I_n.*

Thí dụ 1.3. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *là ma trận đơn vị.*

Định nghĩa 1.6. *(Ma trận tam giác) Ma trận ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử nằm phía dưới (trên) đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận tam giác trên (dưới).*

Thí dụ 1.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *là ma trận tam giác trên;*
$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ *là ma trận tam giác dưới.*

Định nghĩa 1.7. *(Ma trận bậc thang)*
Một dòng của ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là dòng bằng 0 (hay dòng không).
Phần tử khác 0 đầu tiên tính từ trái sang của 1 dòng trong ma trận được gọi là phần tử cơ sở của dòng đó.
Ma trận bậc thang là ma trận khác không cấp $m \times n (m,\ n \geq 2)$ thỏa hai điều kiện:

1. *Các dòng bằng 0 (nếu có) ở phía dưới các dòng khác 0;*

2. *Phần tử cơ sở của 1 dòng bất kỳ nằm bên phải phần tử cơ sở của dòng ở phía trên dòng đó.*

Thí dụ 1.5. *Các ma trận không phải là bậc thang:*
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ma trận đối xứng

Ma trận vuông cấp n có tất cả các cặp phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính bằng nhau ($a_{ij} = a_{ji}$) được gọi là ma trận đối xứng.
Ma trận phản đối xứng cấp n là ma trận có các phần tử đối xứng qua đường chéo chính đối nhau và tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 0.

Thí dụ 1.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *là ma trận đối xứng;*
ma trận phản đối xứng $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ma trận bằng nhau

Định nghĩa 1.8. *Hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi chúng cùng kích thước và $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$.*

Thí dụ 1.7. *Cho* $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & t \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & u & 3 \end{pmatrix}$.
Ta có:
$A = B \Leftrightarrow x = 0;\ y = -1;\ z = 2;\ u = 2;\ t = 3.$

1.2 Các phép toán trên ma trận

1.2.1 Nhân vô hướng một số $\lambda \neq 0$ với ma trận.

cho ma trận $A, \lambda \in \mathbb{R}$, ta có:
$\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Thí dụ 1.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Ta có : $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

Chú thích 2. *i) Phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng ma trận.*

ii) Ma trận $-1.A = -A$ được gọi là ma trận đối của A.

1.2.2 Phép cộng và trừ hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$, ta có: $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}$.

Thí dụ 1.9. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Chú thích 3. *Phép cộng ma trận có tính giao hoán và kết hợp.*

1.2.3 Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{jk})_{n\times p}$, ta có:

$$AB = (c_{ik})_{m\times p}.$$

Trong đó,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \ \left(i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,p}\right)$$

.

Thí dụ 1.10. *Thực hiện phép nhân* $(1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.
....
....
....
....

Thí dụ 1.11. *Thực hiện phép nhân* $(1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
....
....
....
....

Thí dụ 1.12. *Tính* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
....
....
....
....

Chú thích 4. *Ta có các tính chất sau:*

1) $(AB)C = A(BC)$;

2) $A(B + C) = AB + AC$;

3) $(A + B)C = AC + BC$;

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

5) $AI_n = A = I_m A$, *với* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Thí dụ 1.13. *Cho* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Thực hiện phép tính: a) AB; b) BA.

....
....
....
....
....
....
....
....

Thí dụ 1.14. *Thực hiện phép nhân:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

....
....
....
....

Chú thích 5. *i) Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.*

ii) Đặc biệt, khi $A = (a_{ij})_n$ *và* $p \in \mathbb{N}^*$, *ta có:*
$I_n^p = I_n$ *và* $A^0 = I_n$, $A^p = (A^{p-1})A = A(A^{p-1})$
(lũy thừa ma trận).

Thí dụ 1.15. *Cho* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *giá trị của* $(I_2 - B)^{2017}$

....
....
....
....

Thí dụ 1.16. *Cho* $A = (a_{ij})$ *là ma trận vuông cấp 100 có các phần tử ở dòng thứ* i *là* $(-1)^i$. *Tìm phần tử* b_{36} *của ma trận* $B = A^2$.

....
....
....
....

Thí dụ 1.17. *Cho* $A = (a_{ij})$ *là ma trận vuông cấp 40 có các phần tử* $a_{ij} = (-1)^{i+j}$. *Hãy tìm phần tử* a_{25} *của* A^2 .

....
....
....
....

1.2.4 Phép chuyển vị

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Khi đó, $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$ được gọi là ma trận chuyển vị của A (nghĩa là chuyển tất cả các dòng thành cột).

Thí dụ 1.18. *Cho* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Tính chất

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

3) $(A^T)^T = A$;

4) $(AB)^T = B^T A^T$;

5) $A^T = A \Leftrightarrow$ A đối xứng.

Thí dụ 1.19. *Cho* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Tính $(AB)^T$.

b) Tính $B^T A^T$ *và so sánh kết quả với* $(AB)^T$. *Ta có:* $AB = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 7 \\ -3 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$(AB)^T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Trong khi đó: $B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.2.5 Phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận.

(Gauss – Jordan)
Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}, (m \geq 2)$. Các phép biến đổi sơ cấp (PBĐSC) dòng e trên A là:

(e_1) : Hoán vị hai dòng cho nhau $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_k} A^/$.

(e_2) : Nhân 1 dòng với số $\lambda \neq 0, A \xrightarrow{d_i \to \lambda d_i} A^{//}$.

(e_3) : Thay 1 dòng bởi tổng của dòng đó với λ lần dòng khác, $A \xrightarrow{d_i \to d_i + \lambda d_k} A^{///}$.

Chú thích 6. *1) Trong thực hành ta thường làm* $A \xrightarrow{d_i \to \mu d_i + \lambda d_k} B$.
2) Tương tự, ta cũng có các phép biến đổi sơ cấp trên cột của ma trận.

Thí dụ 1.20. *Dùng PBĐSC trên dòng để đưa* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *về ma trận tam giác trên* .
....
....
....
....
....
....

....
....

2 Định thức

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.9. *Định thức của ma trận A là một số, kí hiệu là:*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

được xác định như sau:

i) *Nếu A là ma trận vuông cấp 1,* $A = (a_{11})$ *thì* $\det A = a_{11}$.

ii) *Nếu A là ma trận vuông cấp 2,* $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ *thì* $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

iii) *Nếu A là ma trận vuông cấp 3.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-(a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

.

Thí dụ 1.21. *Áp dụng định nghĩa, tính định thức các ma trận sau:*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

HD: $\det A = 11; \det B = 9$

....
....
....
....
....
....
....
....

2.2 Định thức con bù, phần bù đại số

Định nghĩa 1.10. *Cho ma trận $A = (a_{ij})_n$. khi đó*

i) Định thức có được từ A bằng cách xóa đi dòng i, cột j được gọi là định thức con bù của phần tử a_{ij} của A . Ký hiệu D_{ij}

ii) Giá trị xác định bởi $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ được gọi là phần bù đại số ứng với phần tử a_{ij}

Chú thích 7. *Dùng cách kí hiệu của ma trận con A_{ij} ứng với phần tử a_{ij}, ta thu được các công thức như phần định nghĩa*[1].

Thí dụ 1.22.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= (45 - 48) - 2\,(-36 - 42) + 3\,(32 - 35) = 240$$

Thí dụ 1.23. *Tính các định thức sau:*
$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Chú thích 8. *Trong quá trình tính định thức của ma trận vuông cấp 3, chúng ta có thể làm theo quy tắc sau (quy tắc Sarrus): ghi lại cột thứ nhất và thứ hai vào bên phải của ma trận A để tạo thành một ma trận mới $A^{/}$ có 3 hàng 5 cột. Khi đó định thức của ma trận A sẽ bằng tổng của các tích trên "đường chéo chính" trừ đi tổng các tích trên "đường chéo phụ". Quy tắc này được minh họa bằng sơ đồ :*

[1] Bài tập

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

Người ta thường viết quy tắc Sarrus như sau:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Thí dụ 1.24. *Tính định thức của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta viết

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{matrix}$$

Khi đó

$$|A| = (4.3.4 + 1.1.5 + 2.2.1) - (2.3.5 + 4.1.1 + 1.2.4) = 15$$

.

Thí dụ 1.25. *Tính định thức của các ma trận bằng quy tắc Sarrus*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Thí dụ 1.26. *Tính định thức của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức tính định thức cấp 3 ta có $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$*(khai triển theo dòng 1) với*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$\det A = 7.4 + 1.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$
$= \det A = 28 - 16 - 12 = 0$

Thí dụ 1.27. *Tính định thức của các ma trận sau:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix};\, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

....
....
....
....
....
....
....
....

Thí dụ 1.28. *Tính định thức của các ma trận sau:*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 500 & 10 & 37 \\ 3 & 10 & 38 \end{pmatrix}$$

....
....
....
....
....
....
....
....

2.3 Định thức cấp n

Giá trị của định thức cấp n không thay đổi khi khai triển theo một dòng hoặc cột nào đó.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}.A_{i1} - a_{i2}.A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} \Big(\text{khai triển theo dòng i}\Big)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} \Big(\text{ khai triển theo cột j}\Big)$$

A_{ij} là phần bù đại số ứng với phần tử a_{ij} của ma trận A.

Thí dụ 1.29. *Tính định thức của ma trận sau theo dòng 2, cột 2. Sau đó rút ra nhận xét gì?*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Khai triển định thức A theo dòng 2, ta có :

$\det A = 2.(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10$

Khai triển định thức A theo cột 2, ta có:

$\det A = \ 2.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \ 2.(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-2).(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -10$

Vậy giá trị của định thức không thay đổi khi tính trên dòng (cột) bất kỳ.

Thí dụ 1.30. *Tính định thức của các ma trận sau*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.4 Các tính chất của định thức

Trong quá trình tính toán định thức, để giảm khối lượng tính toán, chúng ta có thể áp dụng các tính chất sau:

i) Nếu ta đổi chỗ hai dòng thì định thức đổi dấu

$$\det A \xlongequal{d_i \leftrightarrow d_j} -\det(A);$$

ii) Định thức có một dòng bằng không thì bằng không

iii) Nhân tử chung của một dòng có thể đem ra ngoài dấu định thức

iv) Nếu ta cộng vào một dòng của định thức với một dòng khác sau khi đã nhân với một số thì định thức không đổi

$$\det A \xlongequal{d_i \to d_i + \alpha d_j} det(A)$$

v) Hai ma trận chuyển vị thì có định thức bằng nhau $\det A = \det(A^T)$

vi) Nếu $A_1,\ A_2, ...,\ A_k$ là các ma trận vuông cấp n thì
$|A_1.A_2....A_k| = |A_1|\,.\,|A_2|\,...\,|A_k|$;
$|A^m| = |A|^m$.

Chú thích 9. *Từ tính chất iv), nếu ma trận có hai dòng hoặc hai cột tỷ lệ thì định thức bằng 0.*

Định lý 1.1. *Nếu A là một ma trận tam giác thì* $\det A$ *là tích các phần tử trên đường chéo chính.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}...a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{vmatrix} = b_{11}.b_{22}...b_{nn}$$

.

Thí dụ 1.31. *Tính định thức của ma trận sau:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *A là một ma trận tam giác trên nên theo định lí ta có* $\det A = 1.(-3).2.4 = -24$.

Thí dụ 1.32. *Tính định thức của các ma trận sau:*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

....

....
....
....
....
....
....
....

Thí dụ 1.33. *Tính định thức cấp 4*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Sử dụng tính chất 5, ta trừ lần lượt các hàng thứ 4, 3, 2 với các hàng liền trước chúng nhằm đưa về định thức dạng tam giác trên.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \xlongequal[d_4 \to d_4 - d_1]{\substack{d_2 \to d_2 - d_1 \\ d_3 \to d_3 - d_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[d_4 \to d_4 - d_2]{d_3 \to d_3 - d_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{d_4 \to d_4 - 2d_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Vậy $\det A = 1$.

Thí dụ 1.34. *Tính định thức cấp 5*

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Trong cột đầu chỉ có hai phần tử khác 0. Khai triển định thức theo các phần tử của cột đầu, ta được:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Đổi chỗ hàng 1 và 2 của định thức thứ nhất ở vế phải, khai triển định thức thứ hai của vế phải theo các phần tử hàng đầu, ta có

$$D = -5\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -19 & -30 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} -19 & -30 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 665$$

Thí dụ 1.35. *Tính các định thức sau:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}; \det B = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}; \det C = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & -6 & 4 \\ 3 & -4 & 16 & 5 \\ 4 & -11 & 20 & 10 \end{vmatrix};$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Chú thích 10. *Trong quá trình tìm định thức của một ma trận cấp n ta nên thực hiện theo các bước sau:*

i) *Bước 1: Chọn 1 dòng (1cột) của ma trận.*

ii) *Bước 2: Chọn một phần tử khác không của dòng được chọn (cột được chọn) thường là phần tử có giá trị 1 hoặc -1 . Sử dụng các phép tóan biến đổi sơ cấp trên dòng (cột) để đưa những phần tử khác trên dòng (cột) được chọn về số 0.*

iii) *Bước 3: Khai triển định thức theo dòng (cột) được chọn ở bước 2.*

Thí dụ 1.36. *Tính các định thức của các ma trận sau:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

....
....
....
....
....
....
....
....

Định lý 1.2. *Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Khi đó*

$$\det(A.B) = \det A.\det B$$

.

Thí dụ 1.37. *a) Cho*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

.
Ta có: $|A| = -2, |B| = 3$ *và do đó* $|A.B| = (-2).3 = -6.$
b) Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & 10 & -4 \\ 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$
Khi đó $\det A = -98, \det B = 468$ *do đó* $\det(AB) = (-98).468 = -45864.$

Thí dụ 1.38. *Giải phương trình* $\begin{vmatrix} x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 1 \\ x & x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

HD: $\det B = x(x-1)(x-3).$
....
....
....
....

Thí dụ 1.39. *Giải bất phương trình* $\begin{vmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ m+1 & m & 2m-1 \\ m-3 & m-3 & m-3 \end{vmatrix} \le 0.$

HD: $\det C = -m^3 + 3m^2$

Thí dụ 1.40. *Tính định thức của* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{pmatrix}.$

HD: $\det D = -(y-z)(x-z)(x-y)(t-z)(t-y)(t-x).$
....
....

....
....

Thí dụ 1.41. *Tính định thức của* $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 \end{pmatrix}$.

HD: $\det E = -(y-z)(x-z)(x-y)(t-z)(t-y)(t-x)(t+x+y+z)$.
....
....
....
....

3 Ma trận khả nghịch

3.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.11. *Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu có ma trận vuông cấp n B thỏa mãn*

$$AB = BA = I_n$$

Khi đó, ta nói A khả nghịch (hay khả đảo) và B được gọi là ma trận nghịch đảo của A. Ký hiệu $B = A^{-1}$

Thí dụ 1.42. *Xét ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $AB = BA = I_2$
Vậy $B = A^{-1}$.

Định lý 1.3. *Cho ma trận* $A = (a_{ij})$ *là ma trận vuông cấp n. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi*

$$\det(A) \neq 0$$

.

Thí dụ 1.43. *Xét* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ta có : $\det A = 4.(-1) - 3.2 = -10 \neq 0$. *Vậy A khả nghịch.*

Định lý 1.4. *Nếu A là ma trận khả nghịch thì* $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

Thí dụ 1.44. *Nếu* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

thì $|A| = 2$ *và do đó* $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1} = \frac{1}{2}$.

Định lý 1.5. *Nếu* $\det(A) \neq 0$ *thì* A *có ma trận nghịch đảo* A^{-1} *và nếu*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

thì A^{-1} *được cho bởi công thức:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}^T \tag{1.1}$$

trong đó

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(D_{ij}) \tag{1.2}$$

là phần bù đại số ứng với phần tử a_{ij} *của ma trận A.*

Thí dụ 1.45. *Cho ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Khi đó $|A| = 2 \neq 0$ *nên A khả nghịch. Ta có*

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 6, c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -6, c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -5, c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8, c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3;$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, c_{33} = (-1)^{3+3}. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Khi đó ta được

$$C^T = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy, ma trận nghịch đảo của ma trận A là

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^T = \frac{1}{2}. \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Thuật toán xác định ma trận nghịch đảo của ma trận A qua các bước như sau:

i) Bước 1. Tính $\det(A)$.
Nếu $\det(A) = 0$ thì kết luận ma trận A không khả nghịch (thuật toán dừng).
Nếu $\det(A) \neq 0$ thì chuyển sang bước 2.

ii) Bước 2. Tìm ma trận C, từ đó suy ra ma trận chuyển vị C^T.

iii) Bước 3. Áp dụng công thức (1.1).

Thí dụ 1.46. *Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:*
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$
$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Chú thích 11. *Nếu B là ma trận nghịch đảo của A thì B là duy nhất và A cũng là ma trận nghịch đảo của B.*

Thí dụ 1.47. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *là hai ma trận nghịch đảo của nhau vì* $AB = BA = I_2$.

Chú thích 12. *1) Nếu ma trận A có 1 dòng (hay cột) bằng 0 thì không khả nghịch.*
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3) Nếu $ac - bd \neq 0$ *thì:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - bd} . \begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}.$$

Thí dụ 1.48. *Cho* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Thực hiện phép tính: a) $(AB)^{-1}$*; b)* $B^{-1}A^{-1}$.
....
....
....
....

3.2 Tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch, ta tìm A^{-1} như sau:

- Bước 1. Lập ma trận $(A\,|I_n)$ (ma trận chia khối) bằng cách ghép ma trận I_n vào bên phải của A.
- Bước 2. Dùng phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa $(A\,|I_n)$ về dạng $(I_n\,|B)$. Khi đó: $A^{-1} = B$.

Thí dụ 1.49. *Tìm nghịch đảo của* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
....
....
....
....
....
....
....
....

4 Hạng của ma trận

4.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.12. *Cho ma trận bất kỳ* $A = (a_{ij})$*. Định thức gồm* $k \times k$ *phần tử thuộc k dòng và k cột bất kỳ của A được gọi là định thức con cấp k của A.*

Thí dụ 1.50. *Cho ma trận*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Tìm các định thức con của A.

....
....
....
....
....
....
....
....

Định nghĩa 1.13. *Cấp cao nhất của định thức con khác không, được gọi là hạng của ma trận A, ký hiệu r(A) hoặc* $\operatorname{rank}(A)$.

Cho ma trận A cấp $m \times n$. Khi đó

a) $0 \leq \operatorname{rank}(A) \leq \min(m, n)$.

b) $\operatorname{rank}(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$.

c) $\operatorname{rank}(A) > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$.

Định nghĩa 1.14. *Cho A là ma trận vuông cấp n. Ma trận A được gọi là không suy biến nếu* $\operatorname{rank}(A) = n$. *Trong trường hợp* $\operatorname{rank}(A) < n$ *thì ma trận A được gọi là suy biến.*

Định lý 1.6. *Cho A là ma trận vuông cấp n. Các mệnh đề sau là tương đương*

i) *A là ma trận khả nghịch.*

ii) $|A| \neq 0$.

iii) *A là ma trận không suy biến.*

4.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

Thuật toán tìm hạng của ma trận

i) *Biến đổi ma trận A về dạng ma trận bậc thang dòng.*

ii) $\operatorname{rank}(A) =$ *số dòng khác 0 của ma trận bậc thang.*

Thí dụ 1.51. *Tìm hạng của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \to d_2 - 2d_1]{d_3 \to d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận cuối cùng có một định thưc con cấp 2 khác 0, chẳng hạn như

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

còn tất các các định thức con cấp 3 của nó đều bằng 0. Vậy $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Thí dụ 1.52. *Tìm hạng của các ma trận sau*

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 9 \\ 6 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$; *b)* $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 5 & 8 & 12 \\ 4 & 9 & 14 & 6 & 10 & 15 \end{pmatrix}$

....
....
....
....
....
....
....
....

Thí dụ 1.53. *Tìm m, để ma trận sau có hạng bằng 2:*

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & m+2 & m+3 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

HD: $m = 0$.

....
....
....
....

5 Bài tập

1.1. 1. *Cho A là ma trận vuông cấp 100 mà phần tử ở dòng i là i. Tìm phần tử ở dòng 1 cột 3 của ma trận* A^2 .

2. *Cho A là ma trận vuông cấp 2007 mà phần tử ở dòng i là* $(-1)^i i$. *Tìm phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận* A^2 .

3. *Cho A là ma trận vuông cấp 2000, trong đó phần tử ở dòng i cột j là* $(-1)^{i+j}$*. Tìm phần tử ở dòng 1 cột 2 của ma trận* A^2 *.*

4. *Cho A là ma trận vuông cấp 10, trong đó phần tử ở dòng thứ i là* 2^{i-1}*. Tìm phần tử ở dòng 1 cột 4 của ma trận* A^2 *.*

5. *Cho A là ma trận vuông cấp 200 trong đó phần tử ở dòng thứ i là i . Tìm phần tử ở dòng 1 cột 4 của ma trận* A^2*.*

6. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*. Tìm ma trận* A^{2017}*.*

7. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$*. Tìm ma trận*$A^{2017}$*.*

8. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa* $A^n =$ O*(ma trận không) .*

9. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*. Tìm ma trận*$(I - A)^{2017}$*.*

10. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$*. Tìm ma trận* A^{2017}*.*

11. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa* $A^n =$ O*(ma trận không) là bao nhiêu?*

12. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *. Số nguyên dương n lớn nhất thỏa* $A^n \neq$ O*(ma trận không) là bao nhiêu?*

13. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*. Tìm ma trận tổng* $\sum\limits_{n=0}^{16} 2^n A^n = I + 2A + 4A^2 + 8A^3 + .. + 2^{16}A^{16}$

14. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Tìm ma trận tổng* $\sum\limits_{n=0}^{2007} (-2)^n A^n = I - 2A + 4A^2 - 8A^3 + .. - 2^{2007}A^{2007}$*.*

15. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận tổng* $\sum\limits_{n=0}^{2007} A^n = I + A + A^2 + A^3 + .. + A^{2007}$.

16. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận tổng* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A^n = I - A + \frac{A^2}{2!} - \frac{A^3}{3!} + .. + (-1)^n \frac{A^n}{n!} + ...$.

17. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận tổng* $\sum\limits_{n=0}^{16} 2^n A^n = I + 2A + 4A^2 + 8A^3 + .. + 2^{16} A^{16}$.

18. *Cho A là ma trận vuông cấp 3 khả nghịch. Định thức của ma trận 3A là bao nhiêu?*

19. *Cho A là ma trận vuông cấp 4 khả nghịch. Định thức của ma trận 4A là bao nhiêu?*

20. *Cho* $|A| = \begin{vmatrix} 7 & 207 & 2007 \\ 2007 & 207 & 7 \\ 0 & 207 & 2007 \end{vmatrix} = x \neq 0$. *Định thức của ma trận* A^{-1} *là bao nhiêu?*

21. *Định thức của ma trận* $10.\begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & m^2 & m^3 \\ m^2 & m^3 & m^4 \end{pmatrix}$ *là bao nhiêu?*

22. *Tìm số thực m để ma trận* $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m-2 \end{pmatrix}$ *khả nghịch .*

23. *Tìm ma trận đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^7, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

24. *Cho A là ma trận vuông cấp n . Biết det(A) =3 và* $A^2 - 3A = 12I_n$ *.Tính* $det(A - 3I_n)$.

25. *Cho A là ma trận vuông cấp n . Biết* $det(A) = 2$ *và* $A - A^{-1} = I_n$ *.Tính* $det(A - I_n)$.

26. *Cho A là ma trận vuông cấp n . Biết* $det(A) = 6$ *và* $det(A^T A - A^T) = 12$ *. Tính* $det(A - I_n)$.

27. *Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch . Biết det(3I-A)* $= 5$ *và* $A^2 - 3A + I_n = 0$. *Tính* $det(A - I_n)$.

1.2. *Tính các định thức*

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&1&2&0\\2&2&7&0\\7&3&4&1\\0&4&4&0\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}7&3&4&1\\0&1&2&0\\2&2&7&0\\0&4&4&0\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix}0&1&2&0\\7&3&4&1\\1&2&7&0\\0&4&4&0\end{vmatrix},\ \Delta_4=\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\4&3&0&0\\2&0&4&-2\\1&-4&0&0\end{vmatrix}$$

$$\Delta_5=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\7&1&3&4\\1&0&2&7\\0&0&4&4\end{vmatrix},\ \Delta_6=\begin{vmatrix}7&1&3&4\\0&0&1&2\\1&0&2&7\\0&0&4&4\end{vmatrix},\ \Delta_7=\begin{vmatrix}1&1&2&0\\2&3&4&1\\1&1&7&0\\2&2&2&1\end{vmatrix}\ \Delta_8=\begin{vmatrix}1&3&-2&2&5\\1&2&-3&1&9\\0&0&5&6&7\\0&0&-1&2&3\\0&0&0&2&1\end{vmatrix}$$

$$\Delta_9=\begin{vmatrix}4&1&0&0\\2&3&0&0\\0&0&7&1\\0&0&2&1\end{vmatrix};\ \Delta_{10}=\begin{vmatrix}0&2&1&2\\0&1&3&4\\2&1&0&0\\1&1&0&0\end{vmatrix},\ \Delta_{11}=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&4\\1&1&1&2\\2&1&3&5\end{vmatrix}.\ \Delta_{12}=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\2&0&3&2\\1&1&2&4\\2&4&4&8\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{13}=\begin{vmatrix}2&1&1&2\\2&0&1&2\\1&1&4&4\\1&1&1&2\end{vmatrix}.\ \Delta_{14}=\begin{vmatrix}2&1&1&1&0\\-1&0&1&1&1\\-1&-1&4&1&2\\-1&-1&-1&2&0\\0&-1&-2&0&0\end{vmatrix},\ \Delta_{15}=\begin{vmatrix}4&0&1&2\\8&0&3&4\\6&1&1&2\\14&1&3&5\end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{16}=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix},\ \Delta_{17}=\begin{vmatrix}x&2&2\\2&x&2\\2&2&x\end{vmatrix}.\ \Delta_{18}=\begin{vmatrix}x&1&1&1\\1&x&1&1\\1&1&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix},\Delta_{19}=\begin{vmatrix}x&1&1&1\\1&x&1&1\\1&1&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{20}=\begin{vmatrix}x+1&x&1&1\\2&x^2&1&1\\1&0&x&1\\x&0&1&x\end{vmatrix},\ \Delta_{21}=\begin{vmatrix}1&x&x^2&x^3\\x&x^3&x^4&x^5\\1&0&x&1\\x&0&1&x\end{vmatrix}.$$

1.3. *Tìm m để*

$$i)\Delta=\begin{vmatrix}2&m&4\\3&0&0\\1&1&2\end{vmatrix}\le 0,\qquad ii)\Delta=\begin{vmatrix}2&m&4\\m&0&0\\1&1&m\end{vmatrix}=0$$

$$iii)\Delta=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&m\\1&1&m\end{vmatrix}\ge 0,\qquad iv)\Delta=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&m\\1&1&m\end{vmatrix}>0,$$

$$v)\Delta=\begin{vmatrix}1&2&m\\2&5&m+1\\3&7&m+2\end{vmatrix}>0;\qquad vi)\Delta=\begin{vmatrix}2+2m&-5&12\\m-3&m+1&-3m\\m+3&-m-1&3m\end{vmatrix}>0,$$

$$vii)\Delta=\begin{vmatrix}2+2m&1&4\\m+3&1&m\\3&1&m\end{vmatrix}>0,\quad viii)\Delta=\begin{vmatrix}m&0&2m&m\\1&m-1&m&0\\1&1&0&0\\m&0&0&0\end{vmatrix}>0,$$

$$ix)\Delta = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \\ m & 2m & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

1.4. *So sánh hai định thức sau:*

i) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

ii) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 16 \\ 2 & 5 & 4 & 14 \\ 3 & 6 & 8 & -8 \\ 4 & 8 & 12 & 34 \end{vmatrix}$

iii) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}$

iv) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 8 & 16 & -24 & 34 \end{vmatrix}$

v) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 5 & 4 & y \\ 3 & 6 & 8 & z \\ 4 & 8 & 12 & t \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6-2x \\ 2 & 5 & 4 & 8-2y \\ 3 & 6 & 8 & 16-2z \\ 4 & 8 & 12 & 24-2t \end{vmatrix}$

1.5. *Giải các phương trình:*

$$i)\ \begin{vmatrix}1 & x & -1 & -1\\ 1 & x^2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0, \qquad ii)\ \begin{vmatrix}1 & 2x & -1 & -1\\ 1 & x & -1 & -1\\ 3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$iii)\ \begin{vmatrix}1 & 2x & -1 & -1\\ 1 & x^2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & x & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0, \quad iv)\ \begin{vmatrix}x & x & -1 & -1\\ 1 & x^2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$v)\ \begin{vmatrix}x & x & 1 & x\\ x & 1 & 1 & 1\\ x & x & 2 & 1\\ x & x & 1 & 3\end{vmatrix}=0, \qquad vi)\ \begin{vmatrix}x & x & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ x & x & 2 & x\end{vmatrix}=0$$

$$vii)\ \begin{vmatrix}x & 1 & 0 & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ 1 & 1 & x & 2\\ -1 & -1 & 2 & x\end{vmatrix}=0, \quad viii)\ \begin{vmatrix}x & -1 & 2 & 2\\ 1 & x & 1 & 4\\ 0 & 0 & x & -2\\ 0 & 0 & 2 & x\end{vmatrix}=0$$

$$ix)\ \begin{vmatrix}x & 2 & 2 & 2\\ 2 & x & 2 & 2\\ 2 & 2 & x & 2\\ 2 & 2 & 2 & x\end{vmatrix}=0$$

1.6. *Tính hạng r(A) của các ma trận:*

$$i) A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 6 & 8 & 11\\ 3 & 6 & 9 & 12 & 14\\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20\end{pmatrix}, \qquad ii) A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 4 & 6 & 9 & 10\\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11\\ 4 & 6 & 8 & 10 & 12\end{pmatrix},$$

$$iii) A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 10 & 15 & 20 & 35\\ 3 & 7 & 9 & 12 & 14\\ 4 & 8 & 13 & 16 & 20\end{pmatrix} \qquad iv) A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 1 & -1 & -3\\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 2 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

$$v) A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1 & 0 & -2\\ 4 & 8 & -1 & 2 & 2\\ 7 & 15 & -9 & 8 & 18\end{pmatrix}, \qquad vi) A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 4 & -2\\ 4 & -1 & 2 & 8 & 2\\ 7 & -9 & 8 & 14 & 18\end{pmatrix},$$

$$vii) A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 9 & -1 & 2 & -2 & 1\\ 15 & 1 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

1.7. *Tìm m để các ma trận sau đây có hạng bằng 1; 2; 3; 4:*

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & 4 \end{pmatrix}$, *ii)* $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & m+4 \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m+1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, *iv)* $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m & 0 & 7 \end{pmatrix}$

v) $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & m+2 & m+3 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & 4 \end{pmatrix}$, *vi)* $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 4 & 4m & 4 & 8 \end{pmatrix}$

1.8. *Thực hiện các phép tính AB, BA(nếu được):*

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

v) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.9. *Ma trận nào sau đây khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo (nếu có).*

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\1&2&0\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-3&0&0\\1&0&2\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-2&0&2\\3&0&-3\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}-2&1&2\\4&3&-1\\2&4&1\end{pmatrix};\quad E=\begin{pmatrix}0&3&-6\\-1&-4&4\\3&6&0\end{pmatrix};\quad F=\begin{pmatrix}1&2&0\\-3&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix};$$

$$G=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&0&2\\3&0&-3\end{pmatrix};\qquad H=\begin{pmatrix}-2&1&2\\4&3&-1\\2&4&1\end{pmatrix};\qquad I=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&-2&-4\\1&2&0\end{pmatrix};$$

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&0&0\\3&0&2\end{pmatrix};\qquad K=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&-2\\3&0&3\end{pmatrix};\qquad L=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\2&3&1\\2&4&-1\end{pmatrix}.$$

1.10. *Tìm m để các ma trận sau khả nghịch:*

$$i)A=\begin{pmatrix}m+1&1&3\\2&m+2&0\\2m&1&3\end{pmatrix},\ ii)A=\begin{pmatrix}m+1&1&3\\m+3&m+3&3\\2m+2&m+3&3\end{pmatrix},\ iii)A=\begin{pmatrix}m+1&m+2&0\\2&m+2&0\\m-4&3&m+2\end{pmatrix}.$$

1.11. *Tính ma trận nghịch đảo của các ma trận:*

i) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&-1\end{pmatrix},$

ii) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\1&4\end{pmatrix},$

iii) $A=\begin{pmatrix}10&-6\\14&7\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-1\\4&2\end{pmatrix};$

iv) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\0&2&2\end{pmatrix},$

v) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-3&-2\\0&3&4\end{pmatrix},$

vi) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}.$

vii) $A=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix},$

viii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

1.12. *Tìm m để các ma trận sau A khả nghịch, tính ma trận đảo trong các trường hợp đó.*

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 2m+3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ m & -1 & m-1 \\ 1 & -3 & m-1 \end{pmatrix},$

$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ m & 1 & m+7 \\ m+3 & 0 & 2m+7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & m \\ 0 & m+1 & 3 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix},$

$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 3 & 7 & m \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$

1.13. *Cho hai ma trận A, B. Tìm ma trận X thỏa*
i) $AX = B$; ii) $XA = B$, nếu có.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

v) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

vi) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 12 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$

vii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. *Tính ma trận tổng* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

D. *Không tồn tại A.*

Câu 2. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính* $B = A^3$.

A. *B=A* .

B. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C. $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

D. *Các kết quả trên đều sai.*

Câu 3. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. $AB = BA$.

B. *AB xác định nhưng BA không xác định.*

C. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Câu 4. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. *AB và BA đều không xác định.*

B. *AB xác định nhưng BA không xác định.*

C. *BA xác định nhưng AB không xác định.*

D. *AB và BA đều xác định.*

Câu 5. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. $AB = BA$.

B. *AB xác định nhưng BA không xác định.*

C. $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

D. *Các khẳng định trên đều sai.*

Câu 6. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây* *là đúng?*

A. $AB = A$. **B**. $AB = B$.

C. $AB = BA$. **D**. *Các khẳng định trên đều sai.*

Câu 7. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. AB=BA.

B. AB *xác định nhưng* BA *không xác định.*

C. $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

D. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Câu 8. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

B. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D. BA *xác định nhưng* AB *không xác định.*

Câu 9. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. $AB = 6\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

B. $AB = 6\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C. $AB = 6\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D. BA *xác định nhưng* AB *không xác định.*

Câu 10. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

B. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D. *BA xác định nhưng AB không xác định.*

Câu 11. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *. Tích BA là*

A. $BA = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

B. $BA = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

C. $BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

D. $BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Câu 12. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *. Tích BA là:*

A. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

B. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

C. $BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

D. $BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Câu 13. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *. Tích BA là:*

A. $BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

B. $BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

C. $BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

D. $BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Câu 14. *Cho A là ma trận vuông cấp 100 mà phần tử ở dòng i là i. Tìm phần tử ở dòng 1 cột 3 của ma trận* A^2 .

A. 5000. **B**. 5050. **C**. 5051. **D**. 5052.

Câu 15. *Cho A là ma trận vuông cấp 2007 mà phần tử ở dòng i là* $(-1)^i i$. *Tìm phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận* A^2.

A. 2008. **B**. 2014. **C**. 2018. **D**. -2008.

Câu 16. *Cho A là ma trận vuông cấp 2000, trong đó phần tử ở dòng i cột j là* $(-1)^{i+j}$. *Tìm phần tử ở dòng 1 cột 2 của ma trận* A^2.

A. -2000. **B**. 2000. **C**. 1. **D**. 0.

Câu 17. *Cho A là ma trận vuông cấp 10, trong đó phần tử ở dòng thứ i là* 2^{i-1}. *Tìm phần tử ở dòng 1 cột 4 của ma trận* A^2 .
A. 1023. **B**. 1025. **C**. 2047. **D**. 2049.

Câu 18. *Cho A là ma trận vuông cấp 200, trong đó phần tử ở dòng thứ i là i . Tìm phần tử ở dòng 1 cột 4 của ma trận* A^2.
A. 20103. **B**. 20102. **C**. 20100. **D**. 20101.

Câu 19. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận*$A^{2009}$.

A. $\begin{pmatrix} 0 & 2009 \\ 2009 & 0 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **C**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Câu 20. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận*$A^{2008}$.

A. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. **C**. $\begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 21. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa* $A^n = \mathrm{O}$*(ma trận không)*
A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 5.

Câu 22. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận*$(I_2 - A)^{15}$.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$. **C**. $\begin{pmatrix} -15 & 1 \\ 1 & -15 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 23. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận* A^{10}.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 30 & 1 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 1 \end{pmatrix}$. **C**. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$.

Câu 24. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa* $A^n = \mathrm{O}$*(ma trận không) là bao nhiêu?*
A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 5.

Câu 25. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Số nguyên dương n lớn nhất thỏa* $A^n \neq \mathrm{O}$*(ma trận không) là bao nhiêu?*
A. 2. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 5.

Câu 26. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính* A^5 .

A. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **C**. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 27. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. **B**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/11 & 1/11 \\ -3/11 & 2/11 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/11 & 2/11 \\ 4/11 & 1/11 \end{pmatrix}$. **D**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/11 & 2/11 \\ -3/11 & 4/11 \end{pmatrix}$.

Câu 28. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 2/7 \\ -1/14 & 3/7 \end{pmatrix}$. **B**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 \\ -1/14 & 9/14 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix}$. **D**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -1/14 & -3/14 \end{pmatrix}$.

Câu 29. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 14 & 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/13 & 3/13 \\ -4/13 & 7/13 \end{pmatrix}$. **B**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/13 & 6/13 \\ -2/13 & 14/13 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/13 & 3/13 \\ -2/13 & 7/13 \end{pmatrix}$. **D**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/13 & -3/13 \\ -2/13 & -7/13 \end{pmatrix}$.

Câu 30. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/14 & -3/14 \\ -1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$. **B**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/14 & 3/14 \\ 1/7 & -4/7 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/7 \\ 1/7 & 8/7 \end{pmatrix}$. **D**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/14 \\ 1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$.

Câu 31. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/17 & 1/17 \\ 3/17 & 7/17 \end{pmatrix}$. **B**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/17 & -1/17 \\ -3/17 & -7/17 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/17 & 1/17 \\ -3/17 & 7/17 \end{pmatrix}$. **D**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/17 & 2/17 \\ -3/17 & 14/17 \end{pmatrix}$.

Câu 32. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/17 & 1/17 \\ 3/17 & 7/17 \end{pmatrix}$. **B**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/17 & -1/17 \\ -3/17 & -7/17 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/17 & 1/17 \\ -3/17 & 7/17 \end{pmatrix}$. **D**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/17 & 2/17 \\ -3/17 & 14/17 \end{pmatrix}$.

Câu 33. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

B. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

D. *Không có ma trận đảo.*

Câu 34. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 20 & 3 \end{pmatrix}$.

A. $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -20 & 10 \end{pmatrix}$.

B. $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -20 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$.

D. *Không có ma trận đảo.*

Câu 35. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

B. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

D. *Các kết qủa trên đều sai.*

Câu 36. *Tính ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

B. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

D. *Các kết quả trên đều sai.*

Câu 37. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận X thỏa XA=B.*

A. $X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$.

B. $X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

C. $X = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$.

D. *Không có ma trận X.*

Câu 38. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận X thỏa AX=B.*

A. $X = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

B. $X = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

C. $X = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

D. *Không có ma trận X.*

Câu 39. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận X thỏa XA=B.*

A. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.
B. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
C. $X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
D. *Không có ma trận X.*

Câu 40. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận X thỏa AX=B.*

A. $X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
B. $X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
C. $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
D. $X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Câu 41. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận X thỏa XA=B.*

A. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
B. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
C. $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
D. $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 42. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận X thỏa AX=B.*

A. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
B. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.
C. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T$.
D. *Không có ma trận X.*

Câu 43. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận X thỏa XA=B.*

A. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
B. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
C. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T$.
D. *Không có ma trận X.*

Câu 44. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận X thỏa AX=B.*

A. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
B. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
C. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T$.
D. *Không có ma trận X.*

Câu 45. *Cho hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận X thỏa XA=B.*

A. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

B. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

C. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T$.

D. *Không có ma trận X.*

Câu 46. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = -4$. **B**. $\Delta = 4$. **C**. $\Delta = 8$. **D**. $\Delta = -8$.

Câu 47. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = -4$. **B**. $\Delta = 4$. **C**. $\Delta = 8$. **D**. $\Delta = -8$.

Câu 48. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = -4$. **B**. $\Delta = 4$. **C**. $\Delta = 8$. **D**. $\Delta = -8$.

Câu 49. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = -4$. **B**. $\Delta = 4$. **C**. $\Delta = 8$. **D**. $\Delta = -8$.

Câu 50. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

A. $\Delta = -4$. **B**. $\Delta = 4$. **C**. $\Delta = 8$. **D**. $\Delta = -8$.

Câu 51. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta \leq 0$.

A. $m \leq 2$. **B**. $m \geq 2$. **C**. $m \leq 1$. **D**. $m \geq 1$.

Câu 52. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta = 0$.

A. $m = 2, m = 0$.

B. $m = -2, m = 0$.

C. $m = -2, m = 2$.

D. *Các kết quả đều sai.*

Câu 53. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta = 0$.

A. $m = 2$, $m = 0$. **B**. $m = -2$, $m = 0$.
C. $m = -2$, $m = 2$. **D**. *Các kết quả đều sai.*

Câu 54. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta \geq 0$.

A. $m \leq 3$. **B**. $m \geq 3$. **C**. $m \leq 2$. **D**. $m \geq 2$.

Câu 55. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta > 0$.

A. $m > 1$. **B**. $m < 1$. **C**. $m > 3$. **D**. $m < 1$.

Câu 56. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta < 0$.

A. $m > 2$. **B**. $m < 2$. **C**. $m > 4$. **D**. $m < 3$.

Câu 57. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 2m-2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta > 0$.

A. $m < 2$. **B**. $m > 0$. **C**. $m > 2$. **D**. $m < 1$.

Câu 58. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta > 0$.

A. $m < 2$. **B**. $m > 2$. **C**. $m < 0$. **D**. m *tùy ý*.

Câu 59. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 5 & m+1 \\ 3 & 7 & m+2 \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta > 0$.

A. $m < 1$. **B**. $m > 1$. **C**. $m > 0$. **D**. $m < 0$.

Câu 60. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m+2 & 4 \\ m & m & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta = 0$.

A. $m = \pm 2$, $m = 0$. **B**. $m = 2$, $m = 0$.
C. $m = -2$, $m = 0$. **D**. $m = 2$, $m = -2$.

Câu 61. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2m+2 & 4 \\ m+1 & 2m+1 & 2 \\ 1 & 2 & 2m \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta = 0$.

A. $m = \pm 1$, $m = 0$. **B**. $m = 1$, $m = 0$.
C. $m = -1$, $m = 0$. **D**. $m = 1$, $m = -1$.

Câu 62. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 0 & 0 \\ 3 & m+1 & 4+m \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta = 0$.

A. $m = 2$, $m = 0$. **B**. $m = -2$, $m = 0$.
C. $m = -2$, $m = 2$. **D**. $m = \pm 2$, $m = 0$.

Câu 63. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 2+2m & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -m \\ m+3 & 1 & m \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta > 0$.

A. $m = 4$, $m = 0$. **B**. $m = -4$, $m = 0$.
C. $0 < m < 4$. **D**. $m < 0 \vee m > 4$.

Câu 64. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 2+2m & -5 & 12 \\ m-3 & m+1 & -3m \\ m+3 & -m-1 & 3m \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta > 0$.

A. $m = 4$, $m = 0$. **B**. $m = -4$, $m = 0$.
C. $0 < m < 4$. **D**. $m < 0 \vee m > 4$.

Câu 65. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} 2+2m & 1 & 4 \\ m+3 & 1 & m \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta > 0$.

A. $m = 4$, $m = 0$. **B**. $m = -4$, $m = 0$.
C. $0 < m < 4$. **D**. $m < 0 \vee m > 4$.

Câu 66. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} m+5 & 5 & 3 \\ m-1 & m-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta = 0$.

A. $m = 1$, $m = 0$. **B**. $m = 0$.
C. $m = 1$. **D**. $m = 1$, $m = 2$.

Câu 67. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} m & 0 & 2m & m \\ 1 & m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta > 0$.

A. $m < 0$. **B**. $m > 0$. **C**. $m > 1$. **D**. $m < 1$.

Câu 68. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \\ m & 2m & 0 & 1 \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta > 0$.

A. $m < 1$. **B**. $m > 1$.
C. $m \leq 1$. **D**. *Các kết quả đều sai.*

Câu 69. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} m & 3 & m \\ 7 & 2 & m+7 \\ 3 & m & 3 \end{vmatrix}$. *Tìm m để* $\Delta = 0$.

A. $m = 0$. **B**. $m = 3$.
C. $m = 3, m = -3$. **D**. $m = 3, m = -3$, $m = 0$.

Câu 70. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ m+1 & m & 2m-1 \\ m-1 & m-1 & m-1 \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta = 0$.

A. $m = 0$. **B**. $m = 1$.
C. $m = 0,\ m = 1$. **D**. *Các kết qủa đều sai.*

Câu 71. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 4 & m & 1 \\ m+4 & m-1 & 5 \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta = 0$.

A. $m = 2$. **B**. $m = -2$.
C. $m = 2,\ m = -2$. **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 72. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ m+1 & m & 2m-1 \\ m+1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta \leq 0$.

A. $m \leq -1$. **B**. $m \geq -1$.
C. $m \geq 1$. **D**. *Các kết qủa đều sai.*

Câu 73. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ m+1 & m & 2m-1 \\ m+1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta < 0$.

A. $m > -1$. **B**. $m < -1$.
C. $m > 1$. **D**. *Các kết qủa đều sai .*

Câu 74. *Tính định thức* $\Delta = \begin{vmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ m+1 & m & 2m-1 \\ m+1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}$. *Tìm* m *để* $\Delta \leq 0$.

A. $m \leq -1$. **B**. $m \geq -1$.
C. $m \geq 1$. **D**. *Các kết quả đều sai.*

Câu 75. *Cho hai định thức:* $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. $\Delta_1 = \Delta_2$. **B**. $\Delta_1 = -\Delta_2$. **C**. $\Delta_2 = 2\Delta_1$. **D**. $\Delta_2 = -2\Delta_1$.

Câu 76. *Cho hai định thức:* $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 16 \\ 2 & 5 & 4 & 14 \\ 3 & 6 & 8 & -8 \\ 4 & 8 & 12 & 34 \end{vmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. $\Delta_1 = \Delta_2$. **B**. $\Delta_1 = -\Delta_2$. **C**. $\Delta_2 = 2\Delta_1$. **D**. $\Delta_2 = 4\Delta_1$.

Câu 77. *Cho hai định thức:* $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. $2\Delta_1 = \Delta_2$. **B**. $\Delta_2 = 8\Delta_1$. **C**. $\Delta_2 = 4\Delta_1$. **D**. $\Delta_2 = 16\Delta_1$.

Câu 78. *Cho hai định thức:* $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 8 & 16 & -24 & 34 \end{vmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. $16\Delta_1 = \Delta_2$. **B**. $\Delta_2 = 8\Delta_1$. **C**. $\Delta_2 = 4\Delta_1$. **D**. $\Delta_2 = 2\Delta_1$.

Câu 79. *Cho hai định thức:* $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 14 \\ 3 & 6 & 8 & -8 \\ 4 & 8 & 12 & 34 \end{vmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. $\Delta_1 = \Delta_2$. **B**. $\Delta_2 = 2\Delta_1$.
C. $\Delta_2 = 4\Delta_1$. **D**. *Các kết qủa trên đều sai.*

Câu 80. *Cho hai định thức:* $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 5 & 4 & y \\ 3 & 6 & 8 & z \\ 4 & 8 & 12 & t \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6-2x \\ 2 & 5 & 4 & 8-2y \\ 3 & 6 & 8 & 16-2z \\ 4 & 8 & 12 & 24-2t \end{vmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. $\Delta_1 = \Delta_2$. **B**. $\Delta_2 = 2\Delta_1$. **C**. $\Delta_2 = -2\Delta_1$. **D**. $\Delta_2 = -4\Delta_1$.

Câu 81. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = -5$. **B**. $\Delta = 5$. **C**. $\Delta = -1$. **D**. $\Delta = 1$.

Câu 82. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = -50$. **B**. $\Delta = 50$. **C**. $\Delta = -10$. **D**. $\Delta = 10$.

Câu 83. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 0$. **B**. $\Delta = 4$. **C**. $\Delta = -2$. **D**. $\Delta = 2$.

Câu 84. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 0$. **B**. $\Delta = 4$. **C**. $\Delta = -2$. **D**. $\Delta = 2$.

Câu 85. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 0$. **B**. $\Delta = 8$. **C**. $\Delta = -2$. **D**. $\Delta = 2$.

Câu 86. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 0$. **B**. $\Delta = -4$. **C**. $\Delta = 1$. **D**. $\Delta = 4$.

Câu 87. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = -12$. **B**. $\Delta = 12$. **C**. $\Delta = -24$. **D**. $\Delta = 24$.

Câu 88. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 14 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 1$. **B**. $\Delta = 4$. **C**. $\Delta = -2$. **D**. $\Delta = 2$.

Câu 89. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 0$. **B**. $\Delta = abc$.
C. $\Delta = abc(a+b+c)$. **D**. $\Delta = (a+b)(b+c)(c+a)$.

Câu 90. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 0$. **B**. $\Delta = (x-4)(x+2)^2$.
C. $\Delta = (x-4)(x-2)^2$. **D**. $\Delta = (x+4)(x-2)^2$.

Câu 91. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 0$. **B**. $\Delta = (x-3)(x+1)^3$.
C. $\Delta = (x+3)(x-1)^3$. **D**. $\Delta = (x-3)(x-1)^3$.

Câu 92. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 0$. **B**. $\Delta = (x-1)(x+1)^3$.
C. $\Delta = (x^2-1)(x^2+1)$. **D**. $\Delta = (x+1)^2(x-1)^2$.

Câu 93. *Tính định thức:* $\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & x & 1 & 1 \\ 2 & x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$.

A. $\Delta = 0$. **B**. $\Delta = (x-1)(x+1)^3$.
C. $\Delta = (x^2-1)^2 x$. **D**. $\Delta = (x+1)^2(x-1)^2$.

Câu 94. *Tìm số nghiệm phân biệt r của phương trình:* $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

A. $r = 1$. **B**. $r = 2$. **C**. $r = 3$. **D**. $r = 4$.

Câu 95. *Tìm số nghiệm phân biệt r của phương trình:* $\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 & -1 \\ 1 & x & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

A. $r = 1$. **B**. $r = 2$. **C**. $r = 3$. **D**. $r = 4$.

Câu 96. *Tìm số nghiệm phân biệt r của phương trình.* $\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

A. $r = 1$. **B**. $r = 2$. **C**. $r = 3$. **D**. $r = 4$.

Câu 97. *Tìm số nghiệm phân biệt r của phương trình:* $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

A. $r = 1$. **B**. $r = 2$.
C. $r = 3$. **D**. *Phương trình vô nghiệm.*

Câu 98. *Giải phương trình:* $\begin{vmatrix} x & x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

A. $x = 0$. **B**. $x = 1; x = -1$.
C. $x = 0; x = 1; x = -1$. **D**. *Phương trình có nghiệm x tùy ý.*

Câu 99. *Giải phương trình* $\begin{vmatrix} x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 1 \\ x & x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

A. $x = 0$. **B**. $x = 1; 0$. **C**. $x = 0; 1; 3$. **D**. $x = 0; 1; 2; 3$.

Câu 100. *Giải phương trình* $\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ x & x & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

A. $x = 0; 4$. **B**. $x = 1; 0; 4$. **C**. $x = 0; 1; 4$. **D**. $x = 0$.

Câu 101. *Giải phương trình* $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ -1 & -1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

A. $x = 0$. **B**. $x = 1; 0; -1$.
C. $x = 0; 2; -2$. **D**. $x = 1; 2; -1; -2$.

Câu 102. *Giải phương trình* $\begin{vmatrix} x & -1 & 2 & 2 \\ 1 & x & 1 & 4 \\ 0 & 0 & x & -2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

A. $x = 0$. **B**. $x = 1; 0; -1$. **C**. $x = 0; 2; -2$. **D**. *Vô nghiệm.*

Câu 103. *Ma trận nào sau đây khả nghịch ?*

A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **B**. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

C. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. **D**. $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 104. *Ma trận nào sau đây khả nghịch ?*

A. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. **B**. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. **D**. $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 105. *Ma trận nào sau đây khả nghịch ?*

A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **B**. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

C. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **D**. $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Câu 106. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{pmatrix}$. *Tìm m để A khả nghịch .*

A. $m \neq 1$. **B**. $m \neq -2$. **C**. $m \neq 1;\ m \neq -2$. **D**. $m \neq -1$.

Câu 107. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ m+3 & m+3 & 3 \\ 2m+2 & m+3 & 3 \end{pmatrix}$. *Tìm m để A khả nghịch .*

A. $m \neq 1$. **B**. $m \neq -2$. **C**. $m \neq 1;\ m \neq -2$. **D**. *Với mọi m.*

Câu 108. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} m+1 & m+2 & 0 \\ 2 & m+2 & 0 \\ m-4 & 3 & m+2 \end{pmatrix}$. *Tìm m để A khả nghịch .*

A. $m \neq 1$. **B**. $m \neq -2$. **C**. $m \neq 1;\ m \neq -2$. **D**. $m \neq 4$.

Câu 109. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 2m+3 \end{pmatrix}$. *Tìm m để A khả nghịch .*

A. $m \neq -1$. **B**. $m \neq 1$. **C**. $m \neq 1;\ m \neq -1$. **D**. *m tùy ý.*

Câu 110. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ m & -1 & m-1 \\ 1 & -3 & m-1 \end{pmatrix}$. *Tìm m để A khả nghịch.*

A. $m \neq -1$. **B**. $m \neq 1$. **C**. $m \neq 1;\ m \neq -1$. **D**. *m tùy ý.*

Câu 111. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ m & 1 & m+7 \\ m+3 & 0 & 2m+7 \end{pmatrix}$. *Tìm m để A khả nghịch.*

A. $m \neq -3$. **B**. $m \neq 3$.
C. $m \neq 3;\ m \neq -3$. **D**. *Các kết qủa trên đều sai.*

Câu 112. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ m & 1 & m-1 \\ m+6 & -3 & m-7 \end{pmatrix}$.*Tìm m để A khả nghịch.*

A. $m \neq -1$. **B**. $m \neq 2$. **C**. *Không có m.* **D**. *m tùy ý.*

Câu 113. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ m & -1 & m-4 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.*Tìm m để A khả nghịch.*

A. $m \neq -2$. **B**. $m \neq 2$. **C**. $m \neq -2, m \neq 2$. **D**. *m tùy ý.*

Câu 114. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ m & -1 & m-1 \\ 1 & -3 & m-1 \end{pmatrix}$.*Tìm m để A khả nghịch.*

A. $m \neq -1$. **B**. $m \neq 1$. **C**. $m \neq 1;\ m \neq -1$. **D**. *m tùy ý.*

Câu 115. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & m \\ 0 & m+1 & 3 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$.*Tìm m để A khả nghịch.*

A. $m \neq -1$. **B**. $m \neq 1$. **C**. $m \neq 1;\ m \neq -1$. **D**. $m \neq 0$.

Câu 116. *Tính hạng r(A) của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 117. *Tính hạng r(A) của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 118. *Tính hạng $r(A)$ của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 35 \\ 3 & 7 & 9 & 12 & 14 \\ 4 & 8 & 13 & 16 & 20 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 119. *Tính hạng $r(A)$ của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 120. *Tính hạng $r(A)$ của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 & -1 \\ 1 & 17 & 4 & 21 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 121. *Tính hạng $r(A)$ của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 10 \\ 3 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 17 & 18 & 36 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 122. *Tính hạng $r(A)$ của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 123. *Tính hạng $r(A)$ của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 8 & 16 & 10 \\ 5 & 2 & 10 & 20 & 12 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 124. *Tính hạng $r(A)$ của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 10 \\ 8 & 6 & 12 & 4 & 20 \\ 10 & 8 & 15 & 5 & 26 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 125. *Tính hạng $r(A)$ của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -5 & 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 126. *Tính hạng r(A) của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 13 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 127. *Tính hạng r(A) của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 15 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 128. *Tính hạng r(A) của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & -1 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & -9 & 8 & 18 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 129. *Tính hạng r(A) của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & 8 & 2 \\ 7 & -9 & 8 & 14 & 18 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 130. *Tính hạng r(A) của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 15 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

A. $r(A) = 1$. **B**. $r(A) = 2$. **C**. $r(A) = 3$. **D**. $r(A) = 4$.

Câu 131. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 3:* $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & 4 \end{pmatrix}$

A. $m \neq 0$. **B**. $m \neq 1$. **C**. $m \neq 0;\ m \neq 1;$. **D**. m *tùy ý.*

Câu 132. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 3:* $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & m+4 \end{pmatrix}$

A. $m = 0$. **B**. $m = 1$. **C**. $m = 0; m = 1$. **D**. *Không tồn tại.*

Câu 133. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2:* $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m+1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

A. $m = 0$. **B**. $m = 1$. **C**. $m = 0; m = 1$. **D**. *Không tồn tại.*

Câu 134. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2:* $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m & 0 & 7 \end{pmatrix}$

A. $m = 0$. **B**. $m = 1$. **C**. $m = 0; m = 1$. **D**. *Không tồn tại.*

Câu 135. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & m+9 \\ 2 & 5 & 4 & m+6 \end{pmatrix}$

A. $m = 0$. **B**. $m = 2$. **C**. $m = 3$. **D**. $m = -1$.

Câu 136. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & m+9 \\ 2 & 1 & 5 & m+6 \end{pmatrix}$

A. $m = -1$. **B**. $m = 0$.
C. $m = 1$. **D**. *Các kết qủa trên đều sai.*

Câu 137. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2:* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & -7 & 9 \\ 5 & -7 & -9 & m \end{pmatrix}$

A. $m = 11$. **B**. $m = -11$. **C**. $m = 9$. **D**. $m = -9$.

Câu 138. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 3:* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & -5 & 7 & m \\ 5 & -7 & 9 & m \end{pmatrix}$

A. $m = 9; m = 11$. **B**. $m = 9$. **C**. $m = 11$. **D**. *m tùy ý.*

Câu 139. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & m \\ 5 & 7 & 9 & m \end{pmatrix}$

A. $m = 1$. **B**. $m = 9$.
C. $m = 11$. **D**. *Các kết qủa trên đều sai.*

Câu 140. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 11 & m+15 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 10+m \end{pmatrix}$

A. $m = 4$. **B**. $m = 1$. **C**. $m = -1$. **D**. $m = 5$.

Câu 141. *Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & m \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

A. $m = 1$. **B**. $m = 3$. **C**. $m = 6$. **D**. $m = 9$.

Chương 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1 Khái niệm

1.1 Hệ phương trình đại số tuyến tính:

Định nghĩa 2.1.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Trong đó: $a_{ij}, b_j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ *là các hệ số;* $x_i, i = \overline{1,n}$ *là các ẩn số.*
Hệ (2.1) *được viết dưới dạng ma trận*

$$AX = B \tag{2.2}$$

Trong đó:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(2.1) *được viết dưới dạng hệ số:*

$$A' = \left(\begin{array}{l|l} a_{11}\ \ a_{12}\ ...\ a_{1n} & b_1 \\ ...\ ...\ ...\ ...\ ... & ... \\ a_{m1}\ \ a_{m2}\ ...\ a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

được gọi là ma trận mở rộng của hệ.

Định nghĩa 2.2. *Nghiệm của hệ* (2.1) *là một bộ gồm n số thực* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *sao cho khi thế* $x_j = \alpha_j$ *vào hệ phương trình, ta được các đẳng thức đúng.*

Thí dụ 2.1. *Xét hệ:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 8x_4 &= 8 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= 11 \end{cases}$$

Hệ được viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 3 & -5 & 6 & -8 \\ 4 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ta có $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 1$ *hay vector* $x = (3, 1, 2, 4)$ *là nghiệm của hệ.*

1.2 Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình

Cho hệ phương trình có dạng $AX = B$. *Xét ma trận mở rộng* A'. *Ta có:*

Định lý 2.1. *(Kronecker-Capelli) Để hệ (2.1) có nghiệm, điều kiện cần và đủ là*

$$rank(A|B) = rank(A) \tag{2.3}$$

Chú thích 13. *i) Nếu* $r(A') = r(A) = k < n$, *hệ có vô số nghiệm với* $n - k$ *bậc tự do.*

ii) Nếu $r(A') > r(A)$, *hệ vô nghiệm.*

2 Các phương pháp giải hệ phương trình đại số tuyến tính

2.1 Phương pháp Cramer

Xét hệ (2.1), trong đó m=n. Ta có:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Gọi:

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ta có :

Định lý 2.2. *(Cramer) Nếu* $\Delta \neq 0$, *thì hệ có nghiệm duy nhất xác định bởi:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Chú thích 14. *i) Nếu* $\Delta = 0$ *và tồn tại* $\Delta_j \neq 0$ *thì hệ vô nghiệm.*

ii) Nếu $\Delta = 0$, *tất cả* $\Delta_j = 0$ *thì hệ có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.*

Thí dụ 2.2. *Giải hệ* $AX = B$

Trong đó $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ta có: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0; \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -28;$

$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -26; \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -20.$

Vậy nghiệm của hệ:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-28}{2} = -14; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-26}{2} = -13; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-20}{2} = -10$

Thí dụ 2.3. *Sử dụng định thức, tìm nghiệm của hệ sau:* $\begin{cases} x + y + z & = 5 \\ x - 2y - 3z & = -1 \\ 2x + y - z & = 3 \end{cases}$

....
....
....
....

Thí dụ 2.4. *Định m để hệ có nghiệm* $\begin{cases} (m+1)x + y & = m + 2 \\ x + (m+1)y & = 0 \end{cases}$

....
....
....
....

Thí dụ 2.5. *Định m để hệ có nghiệm duy nhất* $\begin{cases} mx + (m+2)y & = m + 1 \\ (m+2)x - y & = 0 \end{cases}$

....
....
....
....

2.2 Sử dụng ma trận nghịch đảo

Định lý 2.3. *Xét hệ* (2.1), *trong trường hợp* $m = n$, *nếu A khả nghịch, nghiệm duy nhất của hệ được xác định bởi:*

$$X = A^{-1}B \tag{2.4}$$

Thí dụ 2.6. *Giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 & = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 13x_3 & = 5 \end{cases}$$

Viết hệ dưới dạng ma trận $AX = B$, ta được:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ma trận A có ma trận nghịch đảo:
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 3 \\ -1 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$
Do vậy hệ có nghiệm duy nhất:
$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 3 \\ -1 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Chú thích 15. *Hai phương pháp trên chỉ sử dụng được khi* (2.1) *có ma trận hệ số A là ma trận vuông (số phương trình bằng số ẩn). Mặt khác, khi hệ có số ẩn khá lớn thì việc tính toán nhiều khó khăn. Để khắc phục hạn chế trên, ta sẽ sử dụng phương pháp Gauss.*

2.3 Phương pháp Gauss

i) Ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận A và A' về dạng bậc thang.

ii) Sử dụng định lý Kronecker- Capelli kiểm tra hệ (2.1) có nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm.

iii) Nếu có nghiệm duy nhất, ta giải ngược từ dưới lên nghĩa là tính $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$

Thí dụ 2.7. *Giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = 5 \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 \to d_4 - d_1]{\substack{d_2 \to d_2 - 2d_1 \\ d_3 \to d_3 + d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 \to d_4 + 2d_2]{d_3 \to d_3 + 3d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 16 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{d_4 \to d_4 - d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(A'|B'\right)$$

Lập hệ mới:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 1 \\ -x_2 + 5x_3 & = 0 \\ 16x_3 & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} \\ x_2 = \frac{5}{4} \\ x_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy nghiệm hệ là $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Thí dụ 2.8. *Giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 & = 5 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 & = 4 \end{cases}$$

Lập ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 8 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 8 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(A'|B'\right)$$

Ta có $r\,(A|B) = r\,(A'|B') = 2 = r\,(A')$ *nhỏ hơn số ẩn, nên hệ có vô số nghiệm.*
Xét định thức con cấp hai :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Khi đó, x_1, x_2 *là ẩn chính,* x_3, x_4 *là ẩn tự do.*
Lập hệ mới

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = x_3 + 3x_4 + 1 \\ \quad -x_2 & = 6x_3 - 8x_4 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 11\beta - 13\alpha + 7 \\ x_2 & = -6\beta + 8\beta - 3 \\ x_3 & = \beta \in \mathbb{R} \\ x_4 & = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chú thích 16. *Có nhiều cách chọn ẩn chính. Tuy nhiên, ta nên chọn sao cho việc tìm chúng từ hệ mới là dễ nhất.*

Thí dụ 2.9. *Giải hệ sau* $\begin{cases} x - 3y + 4z &= 1 \\ 2x - 6y + 8z &= 2 \\ 5x - 15y + 21z &= 5 \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....

3 Hệ tuyến tính thuần nhất

3.1 Khái niệm

Xét hệ

$$AX = B \tag{2.5}$$

khi $B = 0$, hệ được gọi là thuần nhất.
Khi đó, ta có $r(A|B) = r(A|0) = r(A)$, nên hệ phương trình luôn có nghiệm.

Thí dụ 2.10. *Giải hệ*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ta có :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có $r(A|B) = r(A) = 3$, nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

Chú thích 17. *Nghiệm $(0, ..., 0)$ được gọi là nghiệm tầm thường.*

Định lý 2.4. *Hệ thuần nhất có số phương trình ít hơn số ẩn luôn có nghiệm không tầm thường.*

Thí dụ 2.11. *Giải hệ sau:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 &= 0 \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & 4 \\ 5 & 10 & -11 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \to 2d_2 - 3d_1]{d_3 \to 2d_3 - 5d_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 3d_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $r(A) = r(A') = 2 < 4$, *nên hệ có vô số nghiệm. Ẩn tự do* x_2, x_4.
Cho $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}, x_2 = \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow x_3 = \alpha, x_1 = \alpha - \beta$.

Chú thích 18. *Trường hợp hệ có vô số nghiệm, thì công thức biểu diễn nghiệm chính qua nghiệm tự do, được gọi là nghiệm tổng quát.*

Thí dụ 2.12. *Tìm nghiệm tổng quát của hệ*

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3t & = 0 \\ 2x - 3y + 4z - t & = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 2t & = 0 \end{cases}$$

....
....
....
....

3.2 Hệ nghiệm cơ bản

Trong nghiệm tổng quát, khi cho ẩn tự do các giá trị đặc biệt tạo thành ma trận đơn vị cùng cấp với số ẩn tự do, ta được các nghiệm đặc biệt được gọi là nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất.

Thí dụ 2.13. *Tìm nghiệm cơ bản của hệ:*

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_4 + 9x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 4x_4 + 14x_5 & = 0 \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & 13 & 4 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta thấy $r(A) = r(A') = 2 < 5$, *nên hệ có vô số nghiệm. Các ẩn tự do* x_2, x_4, x_5.
Cho $x_2 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$, *thế ngược trở lại, ta được* $x_3 = 0, x_1 = -2$. *Như vậy, một nghiệm cơ bản:* $u_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$.
Tương tự, ta có hai nghiệm cơ bản: $u_2 = \left(12, 0, -\frac{5}{2}, 1, 0\right); u_3 = \left(-\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Thí dụ 2.14. *Định m để hệ sau có nghiệm* $\begin{cases} x + 2y - 2z & = 2 \\ 2x + 4y - 5z & = 5 \\ 3x + 6y - mz & = 7 \end{cases}$

....
....
....

....

Thí dụ 2.15. *Định m để hệ sau vô nghiệm :*

$$\begin{cases} x + my + z = m \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y + (m^2+2)z = m^2+m \end{cases}$$

....
....
....
....

Thí dụ 2.16. *Định m để hệ sau có vô số nghiệm* $\begin{cases} x + 2y + (7-m)z = 4 \\ 2x + 4y - 5z = 1 \\ 3x + 6y + mz = 3 \end{cases}$

....
....
....
....

4 Bài tập

2.1. *Biện luận theo m các hệ phương trình tuyến tính sau:*

a) $\begin{cases} (m-1)\,x + (m-1)\,y = 1 \\ x + my = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (m+1)\,x + (m+1)\,y = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\,(m+1)\,x + (m+10)\,y = m; \\ mx + (m+2)\,y = 2m. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x\sin\alpha + y\cos\alpha = m; \\ x\cos\alpha - y\sin\alpha = 2m. \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} mx + 2y = 1; \\ (m+1)\,x + 3y = 1. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 2y - 4z = m \\ -3x + 5y - z = 3 \\ -4x - 4y + 8z = -2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - mz = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 1. \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y - 2z = 7 \\ 6x + 6y - 3z = 2m + 1. \end{cases}$ *i)* $\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 4y - 5z = 1 \\ 3x + 6y + mz = 1. \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 7y - z = 5 \\ 2x + 4y + mz = 7. \end{cases}$

2.2. *Biện luận theo m các hệ phương trình tuyến tính sau:*

a) $\begin{cases} 4x + 3y + z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = m + 7 \\ x + 2y - z = 4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = m \\ x - 2y + 4z = 4. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 7y + 2z = 2 \\ 8x + 12y + (m+6)z = 5. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 7y + 2z = 2 \\ 8x + 12y + (m+6)z = 4. \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + (m+5)y + (m-3)z = m + 1 \\ 8x + (m+11)y + (m-5)z = m + 4. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y + (m^2+2)z = m^2 + m. \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y + 3z = m + 2. \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y + z = m + 2. \end{cases}$ *i)* $\begin{cases} x + 2y + (7-m)z = 2 \\ 2x + 4y - 5z = 1 \\ 5x + 10y + (m-5)z = 4. \end{cases}$ *k)* $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2. \end{cases}$

2.3. *Tìm nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính sau:*

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5; \\ 2x + 5y - 2z = 7. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3; \\ 2x + y - 2z = 7. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4x = 3 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 4x + 3y + z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = 7 \\ x + 2y - z = 4. \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + 4z = 4. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 7y + 2z = 2 \\ 8x + 12y + 2z = 5. \end{cases}$

2.4. *Tìm m để hai hệ phương trình sau có nghiệm chung:*

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5; \\ 2x + 5y - 2z = 7. \end{cases}$ *và* $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3; \\ 2x + y - mz = 7. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - 2z = 1; \\ mx + 2y + z = 3. \end{cases}$ *và* $\begin{cases} x - 2y + 5z = 8; \\ 2x + y - mz = m. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + mz = m. \end{cases}$ *và* $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8; \\ 2x + y + z = m. \end{cases}$

2.5. *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b. \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ phương trình có nghiệm thì $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$.

2.6. *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 19x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 10x_2 + 25x_3 - x_4 = 15 \\ -x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

i) *Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer.*

ii) *Giải hệ phương trình bằng công thức* $X = A^{-1}b$.

iii) *Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss.*

iv) Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss Jordan.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 142. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} (m-1)x+(m-1)y=1 \\ x+\qquad my=0 \end{cases}$ *vô nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m=1$. **B**. $m=0, m=1$. **C**. $m=\pm 1$. **D**. $m=-1$.

Câu 143. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} (m+1)\,x+(m+1)\,y=0 \\ x+my=0 \end{cases}$ *có vô số nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m=0$. **B**. $m=1$. **C**. $m=-1$. **D**. $m=\pm 1$.

Câu 144. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 2\,(m+1)\,x+(m+10)\,y= & m \\ mx+(m+2)\,y= & 2m \end{cases}$ *có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m=2$. **B**. $m\neq 2$. **C**. $m=-2$. **D**. $m\neq -2$.

Câu 145. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x\sin\alpha+y\cos\alpha= & m \\ x\cos\alpha-y\sin\alpha= & 2m \end{cases}$ *có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m=0;\alpha$ *tùy ý.* **B**. $m\neq 0;\alpha$ *tùy ý.*
C. $m=-2;\alpha$ *tùy ý.* **D**. m & α *tùy ý.*

Câu 146. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} mx+2y=1 \\ (m+1)\,x+3y=1 \end{cases}$ *có nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m\neq 2$. **B**. $m\in\mathbb{R}$. **C**. $m\neq 0$. **D**. $m\neq -1$.

Câu 147. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} mx+(m+2)\,y= & m+1 \\ (m+2)\,x-y= & 0 \end{cases}$ *có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:*

A. $m\neq 1$. **B**. $m\neq -1$ & $m\neq -4$.
C. $m\neq -1$. **D**. $m\neq -1$ & $m\neq -2$.

Câu 148. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} (m+1)\,x+y= & m+2 \\ x+(m+1)\,y= & 0 \end{cases}$ *có vô số nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m=0$. **B**. $m=1$. **C**. $m=-1$. **D**. $m=-2$.

Câu 149. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} (m-1)\,x+(m-1)\,y=1 \\ x+my=0 \end{cases}$ *vô nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m=1$. **B**. $m=1; m=0$. **C**. $m=\pm 1$. **D**. $m\neq 1$.

Câu 150. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} mx + 2y = & 1 \\ (m+1)\,x + 3y = & 1 \end{cases}$ *có nghiệm khi và chỉ khi:*
A. $m \neq 2$. **B**. $m \in \mathbb{R}$. **C**. $m \neq 0$. **D**. $m \neq -1$.

Câu 151. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} mx + y = & m \\ x + my = & m \end{cases}$ *vô nghiệm khi và chỉ khi:*
A. $m \neq \pm 1$. **B**. $m = 1$. **C**. $m = -1$. **D**. $m = 0$.

Câu 152. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} mx + (6m-9)\,y = & 2m^2 + 3m + 2 \\ x + my = & m^3 + 1 \end{cases}$ *có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:*
A. $m \neq 3$. **B**. $m \neq \pm 3$. **C**. $m = 3$. **D**. $m = \pm 3$.

Câu 153. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} (2m+1)\,x + (2+m)\,y = & 3m \\ x + my = & m \end{cases}$ *vô nghiệm khi và chỉ khi:*
A. $m = 1$. **B**. $m = 2$. **C**. $m = 0$. **D**. $m = -1$.

Câu 154. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} (m+1)\,x + (6m-4)\,y = & 2m + 4 \\ x + (m+1)\,y = & m^2 + 4 \end{cases}$ *có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:*
A. $m \neq 1$. **B**. $m \neq \pm 5$. **C**. $m \neq 1$ & $m \neq 5$. **D**. $m \in \mathbb{R}$ *tùy ý*.

Câu 155. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} mx - y = & 2m^2 + m + 1 \\ (m-2)\,x + y = & m \end{cases}$ *có nghiệm khi và chỉ khi:*
A. $m \neq \pm 1$. **B**. $m \neq 1$. **C**. $m \neq -1$. **D**. m *tùy ý*.

Câu 156. *Xét hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 4x - y = & m + 1 \\ 10x + 3y = & 6m - 3 \end{cases}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*
A. *Hệ trên vô nghiệm,* $\forall m \in \mathbb{R}$.
B. *Hệ trên có nghiệm,* $\forall m \in \mathbb{R}$.
C. *Hệ trên có vô số nghiệm,* $\forall m \in \mathbb{R}$.
D. *Các khẳng định trên đều sai.*

Câu 157. *Cho hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} mx + y = & 1 \\ x + my = & m \end{cases}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*
A. *Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi* $m \neq 1$.
B. *Hệ vô nghiêm khi* $m = -1$.
C. *Hệ có nghiệm khi và chỉ khi* $m \neq \pm 1$.
D. *Hệ trên có nghiệm với mọi* m.

Câu 158. *Cho hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x + y = & 1 \\ x + my = & m \end{cases}$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. *Hệ trên có duy nhất nghiệm với mọi m.*
B. *Hệ trên có vô số nghiệm với mọi m.*
C. *Hệ trên có nghiệm với mọi m.*
D. *Hệ trên vô nghiệm khi và chỉ khi* $m = 1$.

Câu 159. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} mx + (8m - 16)\,y = & 2m^2 + 3m + 2 \\ x + my = & m^3 + 1 \end{cases}$ *có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m \neq 3$. **B**. $m \neq \pm 3$. **C**. $m \neq 4$. **D**. $m \neq \pm 4$.

Câu 160. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} mx + 3y = & 2m^2 + 3m + 2 \\ 3x + my = & m^3 + 1 \end{cases}$ *có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m \neq 3$. **B**. $m \neq \pm 3$. **C**. $m \neq 4$. **D**. $m \neq \pm 4$.

Câu 161. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = & 5 \\ 2x + 5y - 2z = & 7 \end{cases}$

A. $x = 1 - 3\alpha + 2\beta,\ y = \alpha,\ z = \beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
B. $x = 1 + \alpha, y = 1, z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x = 1 - \alpha,\ y = -\alpha,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
D. $x = 2,\ y = 1,\ z = 1$.

Câu 162. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 3x - y + 2z = & 3 \\ 2x + y - 2z = & 7 \end{cases}$

A. $x = 1 - \alpha/3 - 2\beta/3$, $y = \alpha,\ z = \beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
B. $x = 1 + \alpha,\ y = 0,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x = 1 - \alpha,\ y = -\alpha,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
D. $x = 2,\ y = 3 + 2\alpha,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Câu 163. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x + 4y + 5z & = 1 \\ 2x + 7y - 11z & = 2 \\ 3x + 11y - 6z & = 0 \end{cases}$

A. $x = 1,\ y = 0,\ z = 0$.
B. $x = -3,\ y = 1,\ z = 0$.
C. $x = 1 + 79\alpha,\ y = -21\alpha,\ z = \alpha$.
D. *Hệ vô nghiệm* .

Câu 164. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x + y - z = & 2 \\ 2x + y - 3z = & 1 \\ 3x + 2y - 4z = & 3 \end{cases}$

A. $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$.
B. $x = 1 + 2\alpha,\ y = 1 - \alpha,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x = -1 + 2\alpha,\ y = -\alpha + 3,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
D. $x = -1,\ y = 1 + 2\alpha,\ z = 0;\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Câu 165. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x - y + 2z = & 3 \\ -x + 2y + z = & 2 \end{cases}$

A. $x = 3 + \alpha - 2\beta,\ y = \alpha,\ z = \beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
B. $x = 3 - 2\alpha,\ y = 0,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x = 1 + \alpha,\ y = -\alpha,\ z = -\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
D. $x = 8 - 5\alpha,\ y = 5 - 3\alpha,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Câu 166. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x + 2y + z = & 1 \\ 2x + 6y + 3z = & 2 \\ x + 5y + 3z = & 0 \end{cases}$

A. $x = 1, y = -\alpha/2, z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.
B. $x = 1 + \alpha, y = 1 - \alpha, z = -2 + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x = 1, y = 1, z = -2$.
D. *Hệ trên vô nghiệm* .

Câu 167. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x - y - z = & 3 \\ 2x - 2y - 2z = & 6 \\ 5x - 5y - 5z = & 15 \end{cases}$

A. $x = 3 + \alpha + \beta, y = \alpha, z = \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
B. $x = 3 + 2\alpha, y = \alpha, z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x = 3, y = 0, z = 0$.
D. *Hệ trên vô nghiệm.*

Câu 168. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 3x + 6y + 2z = & 11 \\ 4x + 9y + 4z = & 17 \\ x + 3y + z = & 5 \end{cases}$

A. $x = 1, y = 2, z = -2$.
B. $x = 1, y = 1, z = 1$.
C. $x = 2, y = 2, z = 1$.
D. *Hệ vô nghiệm.*

Câu 169. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = & 0 \\ x - 2y + z = & 1 \\ 3x + y + 4z = & 1 \end{cases}$

A. $x = -3(\alpha + \beta)/2,\ y = \alpha,\ z = \beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
B. $x = 3,\ y = 0,\ z = -2$.
C. $x = 3 + 9\alpha,\ y = \alpha,\ z = -2 - 7\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
D. *Các kết qủa trên đều sai.*

Câu 170. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x + 3y - 4z & = 4 \\ x - 2y + z & = -1 \\ x + 2y - 3z & = 3 \end{cases}$

A. $x = 1,\ y = 1,\ z = 0$.
B. $x = 1 - \alpha,\ y = 1 + \alpha,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x = 1 + \alpha,\ y = 1 + \alpha,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.
D. *Các kết qủa trên đều sai.*

Câu 171. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x+3y+2z= & 0 \\ 2x-y+3z= & 0 \end{cases}$

A. $x=\frac{11}{7}t,\ y=\frac{t}{7},\ z=t\in\mathbb{R}$.
B. $x=-\frac{11}{7}t,\ y=-\frac{t}{7},\ z=t\in\mathbb{R}$.
C. $x=\frac{11}{7}t,\ y=-\frac{t}{7},\ z=t\in\mathbb{R}$.
D. $x=\frac{t}{7},\ y=-\frac{11}{7}t,\ z=t\in\mathbb{R}$.

Câu 172. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x+2y-2z= & 0 \\ 2x+5y-5z= & 1 \\ 3x+7y-7z= & 1 \end{cases}$

A. $x=2-2\alpha, y=2, z=1+\alpha\ \alpha\in\mathbb{R}$.
B. $x=-2,\ y=1+\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}$.
C. $x=-2-\alpha,\ y=1+\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}$.
D. $x=-2, y=2, z=1$.

Câu 173. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x-y+2z= & 0 \\ 2x-2y+5z= & 1 \\ 3x-2y+6z= & 2 \end{cases}$

A. $x=-1,\ y=1,\ z=1$.
B. $x=-2,\ y=0,\ z=1$.
C. $x=0,\ y=2,\ z=1$.
D. *Các kết quả trên sai.*

Câu 174. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 5x+12y-12z= & 2 \\ 2x+5y-5z= & 1 \\ 3x+7y-7z= & 1 \end{cases}$

A. $x=-2-2\alpha,\ y=\alpha,\ z=1+\alpha\ \alpha\in\mathbb{R}$.
B. $x=-2,\ y=1+\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}$.
C. $x=-2+\alpha,\ y=1+\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}$.
D. $x=-2, y=1, z=0$.

Câu 175. *Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x-y+2z= & -1 \\ 2x-2y+5z= & -2 \\ 3x-2y+6z= & -2 \end{cases}$

A. $x=0,\ y=0,\ z=-1/2$.
B. $x=2,\ y=1,\ z=1$.
C. $x=0,\ y=1,\ z=0$.
D. *Các kết quả trên sai.*

Câu 176. *Tìm nghiệm hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x-y+2z= & 1 \\ 3x-2y-z= & 0 \\ 4x-3y+z= & 2 \end{cases}$

A. $x=1+\alpha-2\beta,\ y=\alpha,\ z=\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
B. $x=-2-9\alpha,\ y=-3+7\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}$.
C. $x=-2,\ y=-3,\ z=0$.
D. *Hệ trên vô nghiệm.*

Câu 177. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+4y+3z=1 \end{cases}$

A. $x=-1, y=1, z=0.$
B. $x=-\alpha-\beta, y=\alpha, z=\beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
C. $x=-1-2\alpha, y=1+\alpha, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
D. $x=-1-\alpha, y=1, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$

Câu 178. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x-y-2z=0 \\ x+y+4z=2 \\ 2x-2y-5z=0 \end{cases}$

A. $x=\alpha+2\beta, y=\alpha, z=\beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
B. $x=1, y=1-2\alpha, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
C. $x=1-\alpha, y=1-3\alpha, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
D. $x=1, y=1, z=0.$

Câu 179. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x+y-2z=0 \\ 5x+y-5z=3 \end{cases}$

A. $x=3+\alpha+\beta,\ y=\alpha,\ z=\beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
B. $x=1+\alpha,\ y=-2,\ z=\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}.$
C. $x=1,\ y=-2,\ z=0.$
D. *Hệ trên vô nghiệm.*

Câu 180. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-5y+z=2 \\ 5x-13y+6z=5 \end{cases}$

A. $x=1+17\alpha,\ y=7\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}.$
B. $x=1-17\alpha,\ y=7\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}.$
C. $x=1,\ y=0,\ z=0.$
D. *Hệ trên vô nghiệm .*

Câu 181. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-5y+\ z=2 \\ 5x-13y+7z=5 \end{cases}$

A. $x=1,\ y=0,\ \ z=0.$
B. $x=1+17\alpha,\ y=7\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}.$
C. $x=1-17\alpha,\ y=7\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}.$
D. *Hệ trên vô nghiệm .*

Câu 182. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-6y+8z=2 \\ 5x-15y+21z=5 \end{cases}$

A. $x=1+17\alpha,\ y=7\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}.$
B. $x=1-17\alpha,\ y=7\alpha,\ z=\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}.$
C. $x=1+3\alpha,\ y=\alpha,\ z=0.$
D. *Các kết quả trên đều sai .*

Câu 183. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - 6y + 8z = 2 \\ 5x - 15y + 20z = 5 \end{cases}$

A. $x = 1 + 17\alpha,\ y = 7\alpha,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}.$
B. $x = 1 - 17\alpha,\ y = 7\alpha,\ z = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}.$
C. $x = 1,\ y = 0,\ z = 0.$
D. *Các kết quả trên đều sai.*

Câu 184. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - 5y + z = 2 \\ 5x - 13y + 6z = -5 \end{cases}$

A. *Hệ vô nghiệm .*
B. $x = 1 + 17\alpha, y = 7\alpha, z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
C. $x = 1 - 17\alpha, y = 7\alpha, z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}$.
D. $x = 1, y = 0, z = 0.$

Câu 185. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x - 3y + 4z & = 1 \\ 2x - 6y + 8z & = 2 \\ 5x - 15y + 20z & = 5 \end{cases}$

A. $x = 1 + 17\alpha, y = 7\alpha, z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
B. $x = 1 - 17\alpha, y = 7\alpha, z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
C. $x = 1, y = 0, z = 0.$
D. *Các kết quả trên đều sai .*

Câu 186. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

A. $x = \alpha/2, y = \alpha/2, z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
B. $x = 0, y = 0, z = 0.$
C. $x = \alpha - 2, y = 2, z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
D. *Các kết quả trên đều sai .*

Câu 187. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - 4z = -1 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$

A. $x = \alpha/2, y = \alpha/2,\ z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
B. $x = 3, y = 2, z = 5.$
C. $x = \alpha - 2, y = 2, z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
D. *Các kết quả trên đều sai.*

Câu 188. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 3x + 4y - 3z & = 2 \\ 4x + 7y - 4z & = 6 \\ 2x + 3y - 2z & = 2 \end{cases}$

A. $x = \alpha/2, y = \alpha/2, z = -2/3; \alpha \in \mathbb{R}.$
B. $x = 0, y = -1, z = -2.$
C. $x = \alpha - 2, y = 2, z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}.$
D. *Các kết quả trên đều sai .*

Câu 189. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y-4z=3 \\ 3x+y-8z=6 \end{cases}$

A. $x=-5, y=5, z=-2$.
B. $x=1+2\alpha, y=1-\alpha, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x=2+2\alpha, y=3-\alpha, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}$.
D. $x=-1, y=1+2\alpha, z=0; \alpha \in \mathbb{R}$.

Câu 190. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x+3y-7z= & 7 \\ x+2y-4z= & 3 \\ -y+4z= & -3 \end{cases}$

A. $x=-7, y=7, z=1$.
B. $x=1-2\alpha, y=2-\alpha, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x=2+2\alpha, y=3-\alpha, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}$.
D. $x=7, y=-7, z=-1; \alpha \in \mathbb{R}$.

Câu 191. *Giải hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} x+y-z= & 2 \\ y-3z= & 1 \\ y-4z= & 3 \end{cases}$

A. $x=5, y=-5, z=-2$.
B. $x=1+2\alpha, y=1-\alpha, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}$.
C. $x=2+2\alpha, y=3-\alpha, z=\alpha; \alpha \in \mathbb{R}$.
D. $x=-1, y=1+2\alpha, z=0; \alpha \in \mathbb{R}$.

Câu 192. *Định m để hệ phương trình có vô số nghiệm:* $\begin{cases} 2x+2y-4z= & m \\ -3x+5y-z= & 3 \\ -4x-4y+8z= & -2 \end{cases}$

A. $m=-2$. **B**. $m=-1$. **C**. $m=2$. **D**. $m=1$.

Câu 193. *Tìm m để hệ phương trình tuyến tính sau có nghiệm* $\begin{cases} 2x+2y-z= & 3 \\ 2x+5y-2z= & 7 \\ 6x+6y-3z= & 2m+1 \end{cases}$

A. $m=2$. **B**. $m=4$. **C**. $m=6$. **D**. $m=8$.

Câu 194. *Định m để hệ phương trình có nghiệm:* $\begin{cases} x+2y-2z= & 0 \\ 2x+4y-5z= & 1 \\ 3x+6y+mz= & 1 \end{cases}$

A. $m=7$. **B**. $m=-7$. **C**. $m=6$. **D**. $m=-6$.

Câu 195. *Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất :* $\begin{cases} x+y+z= & 0 \\ x+2y-mz= & 1 \\ 2x+3y+2z= & 1 \end{cases}$

A. $m \neq 1$. **B**. $m \neq -1$. **C**. $m \neq 2$. **D**. $m=-1$.

Câu 196. *Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất :* $\begin{cases} x+2y-2z & =2 \\ 3x+7y-z & =5 \\ 2x+4y+mz & =7 \end{cases}$

A. $m \neq 7$. **B**. $m \neq -7$. **C**. $m \neq -4$. **D**. $m=4$.

Câu 197. *Định m để hệ phương trình có nghiệm:* $\begin{cases} x+2y-2z &= 2 \\ 2x+4y-5z &= 5 \\ 3x+6y-mz &= 7 \end{cases}$

A. $m=7$. **B**. $m=-7$. **C**. $m=6$. **D**. $m=-6$.

Câu 198. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 4x+3y+z= & 7 \\ 2x+4y-2z= & m+7 \\ x+2y-z= & 4 \end{cases}$ *vô nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m=1$. **B**. $m>1$. **C**. $m\neq 1$. **D**. $m\neq -1$.

Câu 199. *Hệ phương trình tuyến tính* $\begin{cases} 3x-y+2z= & 3 \\ 2x+y-2z= & m \\ x-2y+4z= & 4 \end{cases}$ *có nghiệm khi và chỉ khi:*

A. $m=-7$. **B**. $m=-2$. **C**. $m=-4$. **D**. $m=-1$.

Câu 200. *Định m để hệ phương trình có nghiệm:* $\begin{cases} 2x+3y-z &= 1 \\ 4x+7y+2z &= 2 \\ 8x+12y+(m+6)z &= 5 \end{cases}$

A. $m=-10$. **B**. $m=10$. **C**. $m\neq -10$. **D**. $m\neq \pm 10$.

Câu 201. *Định m để hệ phương trình có vô số nghiệm:* $\begin{cases} 2x+3y-z= & 1 \\ 4x+7y+2z= & 2 \\ 8x+12y+(m+6)z= & 4 \end{cases}$

A. $m=-10$. **B**. $m=10$.
C. $m\neq 10$. **D**. *m là một số thực tùy ý.*

Câu 202. *Định m để hệ phương trình sau có nghiệm:* $\begin{cases} 2x+3y-z= & 1 \\ 4x+(m+5)y+(m-3)z= & m+1 \\ 8x+(m+11)y+(m-5)z= & m+4 \end{cases}$

A. $m\neq 0$. **B**. $m\neq 1$.
C. *Không có giá trị m nào .* **D**. *m là một số thực tùy ý.*

Câu 203. *Định m để hệ phương trình sau có nghiệm:* $\begin{cases} 2x+3y-z= & 1 \\ 4x+(m+5)y+(m-3)z= & m+1 \\ 8x+12y+(m-4)z= & m+4 \end{cases}$

A. $m\neq 0$. **B**. $m\neq 1$.
C. $m\neq 0$ & $m\neq 1$. **D**. *m là một số thực tùy ý .*

Câu 204. *Định m để hệ phương trình sau có nghiệm:* $\begin{cases} 2x+3y-z &= 1 \\ 4x+(m+5)y+(m-3)z &= m+2 \\ 8x+12y+(m-4)z &= m+4 \end{cases}$

A. $m\neq 0$. **B**. $m\neq 1$.
C. $m\neq 0$ & $m\neq 1$. **D**. *m là một số thực tùy ý.*

Câu 205. *Định m để hệ phương trình sau có nghiệm:* $\begin{cases} 2x+3y-z &= 1 \\ 4x+(m+5)y+(m-3)z &= m+2 \\ 8x+12y+(m-4)z &= m+4 \end{cases}$

A. $m \neq 0$. **B**. $m \neq 1$.
C. $m \neq 0$ & $m \neq 1$. **D**. *m là một số thực tùy ý.*

Câu 206. *Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:* $\begin{cases} x+my+z &= 2 \\ x+2y+2z &= 1 \\ 2x+(m+2)y+3z &= m \end{cases}$

A. $m = 3$. **B**. $m \neq 3$.
C. *m tùy ý .* **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 207. *Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:* $\begin{cases} x+my+z &= 2 \\ x+2y+2z &= 1 \\ 2x+(m+2)y+4z &= m \end{cases}$

A. $m = 2$. **B**. $m \neq 2$.
C. *m tùy ý.* **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 208. *Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:* $\begin{cases} x+my+z &= m \\ x+2y+2z &= 1 \\ 2x+(m+2)y+(m^2+2)z &= 2m \end{cases}$

A. $m = -1 \vee m = 2$. **B**. $m = -1$.
C. $m = 1$. **D**. $m = 2 \vee m = \pm 1$.

Câu 209. *Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:* $\begin{cases} x+my+z &= m \\ x+2y+2z &= 1 \\ 2x+(m+2)y+(m^2+2)z &= m^2+m \end{cases}$

A. $m = -1$. **B**. $m = 2$.
C. $m = \pm 1$. **D**. $m = 2 \vee m = -1$.

Câu 210. *Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:* $\begin{cases} x+my+z &= m \\ x+2y+2z &= 1 \\ 2x+(m+2)y+3z &= m+2 \end{cases}$

A. $m = 3$. **B**. $m \neq 3$.
C. *m tùy ý .* **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 211. *Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:* $\begin{cases} x+my+z &= m \\ x+2y+2z &= 1 \\ 2x+(m+2)y+z &= m+2 \end{cases}$

A. $m = 3$. **B**. $m \neq 3$.
C. *m tùy ý.* **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 212. *Định m để hệ phương trình có vô số nghiệm:* $\begin{cases} x+2y+(7-m)z &= 2 \\ 2x+4y-5z &= 1 \\ 5x+10y+(m-5)z &= 4 \end{cases}$

A. $m = -1$. **B**. $m = -1$. **C**. $m = 2$. **D**. $m = 0$.

Câu 213. *Định m để hệ phương trình có vô số nghiệm:* $\begin{cases} 2x+4y+2(7-m)z=4 \\ 2x+4y-5z=1 \\ 5x+10y+(m-5)z=4 \end{cases}$

A. $m=5$. **B**. $m=7$. **C**. $m=1$. **D**. $m=0$.

Câu 214. *Định m để hệ phương trình có vô số nghiệm:* $\begin{cases} x+2y+(7-m)z & =2 \\ 2x+4y-5z & =1 \\ 3x+6y+mz & =3 \end{cases}$

A. $m=7$. **B**. $m=-7$. **C**. $m=1$. **D**. $m=0$.

Câu 215. *Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất :* $\begin{cases} x + 2y - (5-m)z & =2 \\ 2x + 4y & =1 \\ 3x + 4y & =7 \end{cases}$

A. $m\neq 5$. **B**. $m\neq -5$. **C**. $m\neq 6$. **D**. $m\neq 0$.

Câu 216. *Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất :* $\begin{cases} x+2y+(m-5)z & =2 \\ 2x-y & =1 \\ (5-m)x+y+(m-5)z & =6 \end{cases}$

A. $m\neq 2$. **B**. $m\neq 4$.
C. $m\neq 5$. **D**. $m\neq 2 \wedge m\neq 5$.

Chương 3

KHÔNG GIAN VECTOR

1 Khái niệm

1.1 Không gian vector

Định nghĩa 3.1. *Không gian vector V trên $\mathbb{R}$ (KGVT V) là cặp (V,$\mathbb{R}$) được trang bị hai phép toán*

$$\begin{array}{ll} V \times V & \to V \\ (x,y) & \mapsto x+y \end{array} \quad \text{và} \quad \begin{array}{ll} R \times V & \to V \\ (\lambda, y) & \mapsto \lambda y \end{array}$$

thỏa 8 tính chất sau:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. *Tồn tại duy nhất vector* $\theta \in V : x + \theta = \theta + x = x$;
4. $\exists(-x) \in V : (-x) + x = x + (-x) = \theta$;
5. $(\lambda_1\lambda_2)x = \lambda_1(\lambda_2 x)$;
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
7. $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$;
8. $1.x = x$.

1.2 Sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 3.2. *Trong KGVT V , cho n vector* $u_i, (i = 1, ..., n)$.

i) $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$ *được gọi là một tổ hợp tuyến tính của n vector* u_i.

ii) *Hệ* $\{u_1,\ u_2, ...,\ u_n\}$ *được gọi là độc lập tuyến tính (ĐLTT) nếu có* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta$ *thì* $\lambda_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$.

iii) *Hệ* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *không là độc lập tuyến tính thì được gọi là phụ thuộc tuyến tính (PTTT).*

Thí dụ 3.1. a) *Trong* $\mathbb{R}^2$, *hệ gồm 2 vector:* $\{u_1 = (1; 1), u_2 = (2; 3)\}$ *là độc lập tuyến tính.*

....
....
....
....

b) *Trong* $\mathbb{R}^n$, *hệ gồm n vector :* $\{u_i = (0; ...;\ \alpha_i; ...;\ 0);\ i = 1, ..., n;\ \alpha \neq 0\}$ *(thành phần thứ i của* u_i *là* α_i*) là ĐLTT.*

....
....
....
....

c) *Trong* $\mathbb{R}^3$, *hệ gồm 3 vector:* $\{u_1 = (1; 3; 2), u_2 = (2; 0; 1), u_3 = (0; 6; 5)\}$ *là phụ thuộc tuyến tính.*

....
....
....
....

1.3 Cơ sở của không gian vector

Định nghĩa 3.3. *Cơ sở và số chiều của không gian vector*

i) *Trong KGVT* V, *hệ* $A = \{u_1,\ u_2, ...,\ u_n\}$ *được gọi là một cơ sở của* V *nếu hệ* A *độc lập tuyến tính và mọi vector của* V *đều biểu diễn tuyến tính qua* A.

ii) *Nếu KGVT* V *có một cơ sở gồm* n *vector thì* V *được gọi là KGVT có* n *chiều. Ký hiệu là* $dimV = n$. *Khi đó, trong KGVT* V, *mọi hệ có nhiều hơn* n *vector đều phụ thuộc tuyến tính.*

Thí dụ 3.2. *Trong* $\mathbb{R}^2$, *hệ* $A = \{u_1 = (1; 1),\ u_2 = (2; 3)\}$ *là một cơ sở.*

Chú thích 19. *Trong không gian vector có vô số cơ sở, số lượng vector trong mỗi cơ sở không thay đổi và bằng số chiều của không gian vector.*

Chú thích 20. *Trong số các cơ sở của* $\mathbb{R}^n$, *có một cơ sở đặc biệt lập nên một ma trận đơn vị . Ta gọi đó là cơ sở chính tắc, ký hiệu* E_n.

1.4 Tọa độ của vector theo một cơ sở. Ma trận chuyển cơ sở

Trong KGVT V *, cho cơ sở* $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$.
Với bất kỳ $u \in V$ *, tồn tại* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ *sao cho* $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n$.
Bây giờ, giả sử rằng $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$.
$\Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$.
$\Rightarrow (\lambda_1 - \alpha_1) u_1 + (\lambda_2 - \alpha_2) u_2 + ... + (\lambda_n - \alpha_n) u_n = \theta$
$\Rightarrow \lambda_1 - \alpha_1 = \lambda_2 - \alpha_2 = ... = \lambda_n - \alpha_n = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = \alpha_1,\ \lambda_2 = \alpha_2, ...,\ \lambda_n = \alpha_n$.
Như vậy, với bất kỳ $u \in V$ *, đều tồn tại duy nhất* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ *sao cho:*

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n.$$

Ta gọi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *là các tọa độ của* u *theo cơ sở* F *. Ký hiệu là:*

$$[u]_F = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ ... \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Chú thích 21. *Nếu* E_n *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$ *thì ta sẽ ký hiệu* $[x]$ *thay cho* $[x]_{E_n}$

Thí dụ 3.3. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *, cho* $u = (3; -5)$ *và một cơ sở* $B = \{u_1 = (2; -1), u_2 = (1; 1)\}$ *. Hãy tìm* $[u]_B$.
Đặt $[u]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = a.u_1 + b.u_2$
$\Leftrightarrow (3; -5) = a(2; -1) + b(1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b & = 3 \\ -a + b & = -5 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 8/3 \\ b = -7/3 \end{cases} \Rightarrow [u]_B = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -7/3 \end{pmatrix}$.

Thí dụ 3.4. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *, cho 2 cơ sở:* $B_1 = \{u_1 = (1; 0), u_2 = (0; -1)\}$,
$B_2 = \{v_1 = (2; -1), u_2 = (1; 1)\}$,
Biết $[x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Hãy tìm* $[x]_{B_1}$.
Từ $[x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = v_1 + 2v_2 = (2; -1) + 2.(1; 1) = (4; 1)$
Đặt $[x]_{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = a.u_1 + b.u_2$
$\Leftrightarrow (4; 1) = a(1; 0) + b(0; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow [x]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Thí dụ 3.5. *Trong* $\mathbb{R}^3$ *cho vector* $u = (1, 2, 3)$. *Tìm* $[u]$.
Đặt $[u] = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = a.e_1 + b.e_2 + c.e_3$

$\Leftrightarrow (1;2;3) = a\,(1;0;0) + b\,(0;1;0) + c\,(0;0;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow [u] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Chú thích 22. *Trong* $\mathbb{R}^n$*. Nếu* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *thì* $[x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

1.5 Ma trận chuyển cơ sở

Trong KGVT V *, cho 2 cơ sở:* $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *,* $B' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *.*
Ma trận $\left([v_1]_B \quad [v_2]_B \quad ... \quad [v_n]_B \right)$ *được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ* B *sang* B'*.*
Ký hiệu $P_{B\to B'}$

$$P_{B\to B'} = \left([v_1]_B \quad [v_2]_B \quad ... \quad [v_n]_B \right). \tag{3.1}$$

Thí dụ 3.6. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *cho hai cơ sở*
$B = \{u_1 = (1;0)\,, u_2 = (0;-1)\}\,, B' = \{v_1 = (2;-1)\,, u_2 = (1;1)\}$.
Hãy tìm ma trận chuyển từ cơ sở B *sang* B'*.*
Ta có : $P_{B\to B'} = \left([v_1]_B \quad [v_2]_B \right)$.
Đặt $[v_1]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 = au_1 + bu_2$

$\Leftrightarrow (2;-1) = a\,(1;0) + b\,(0;-1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow [v_1]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Đặt $[v_2]_B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_2 = cu_1 + du_2$

$\Leftrightarrow (1;1) = c\,(1;0) + d\,(0;-1) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow [v_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Vậy $P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Định lý 3.1. *Cho* B_1, B_2, B_3 *là 3 cơ sở của không gian vector V. Khi đó:*

i) $P_{B_i\to B_i} = I_n, \ \ (i = 1, 2, 3)$;

ii) $P_{B_1\to B_2} = \left(P_{B_2\to B_1}\right)^{-1}$;

iii) $P_{B_1\to B_3} = P_{B_1\to B_2}.P_{B_2\to B_3}$

Công thức đổi tọa độ :

$$[x]_B = P_{B\to B'}[x]_{B'} \tag{3.2}$$

Thí dụ 3.7. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *cho hai cơ sở:*
$B = \{u_1 = (1;0)\,, u_2 = (0;-1)\}\,, B' = \{v_1 = (2;-1)\,, u_2 = (1;1)\}\,.$
Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B *sang* B'.
Ta có: $P_{B\to B'} = P_{B\to E}.P_{E\to B'} = (P_{E\to B})^{-1}.P_{E\to B'}$
$P_{E\to B} = \left(\ [u_1]\quad [u_2]\ \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow (P_{E\to B})^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$
$P_{E\to B'} = \left(\ [v_1]\quad [v_2]\ \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Thí dụ 3.8. *Trong* $\mathbb{R}^3$ *, cho 2 cơ sở và cho biết*

$$P_{B_2\to B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \ [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tìm tọa độ của vector v *theo cơ sở* B_2.

$$[v]_{B_2} = P_{B_2\to B_1}.[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

1.6 Hạng của một hệ vector

Trong $\mathbb{R}^n$ *cho* m *vector* $u_i = (a_{i1}, ..., a_{in}), i = \overline{1,m}$.
Ta gọi

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

là ma trận dòng của m *vector* u_i.

Định nghĩa 3.4. *Hạng của* A *được gọi là hạng của hệ vector, ký hiệu* $rank(u_1, u_2, ..., u_m)$

Định lý 3.2. *Trong* $\mathbb{R}^n$, *hệ* $W = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ *,* A *là ma trận vector dòng của hệ. Khi đó:*

i) W *độc lập tuyến tính* $\Leftrightarrow r(A) = m$ *(hạng của* A *bằng số phần tử của hệ).*

ii) W *phụ thuộc tuyến tính* $\Leftrightarrow r(A) < m$.

Định lý 3.3. *Trong* $\mathbb{R}^n$, *hệ* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *là cơ sở* $\Leftrightarrow r(A) = n$.

Thí dụ 3.9. *Trong $\mathbb{R}^3$, xét sự ĐLTT hay PTTT của hệ sau:*

$$\{u_1 = (-1;\ 2;\ 0),\ u_2 = (1;\ 5;\ 3),\ u_3 = (2;\ 3;\ 4)\}$$

....
....
....
....

Thí dụ 3.10. *Trong $\mathbb{R}^3$, tìm điều kiện m để hệ sau là cơ sở:*

$$\{u_1 = (m;\ 1;\ 1),\ u_2 = (1;\ m;\ 1),\ u_3 = (1;\ 1;\ m)\}$$

....
....
....
....

Thí dụ 3.11. *Trong $\mathbb{R}^4$, điều kiện của tham số m để hệ sau*

$$\{(1;2;1;4),\ (2;3;m;7),\ (5;8;2m+1;19),\ (4;7;m+2;15)\}$$

phụ thuộc tuyến tính là:
....
....
....
....

2 Không gian vector con

2.1 Khái niệm

Cho không gian vector $\mathbb{R}^n$.
Tập hợp $M \subset \mathbb{R}^n, M \neq \emptyset$ cũng là một không gian vector, M được gọi là không gian vector con của $\mathbb{R}^n$

Thí dụ 3.12. *Trong $\mathbb{R}^3$. Xét $M = \{y = (y_1, y_2, 0)/y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$.*
Ta có: $M \subset \mathbb{R}^3$.
$y = (1,1,0) \in M$. M cũng là một không gian vector.
Nên M là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$

2.2 Điều kiện để một tập con là một không gian vector con

Định lý 3.4. *Tập $M \neq \emptyset, M \in \mathbb{R}^n$ là không gian vector con khi và chỉ khi hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) $\forall x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$

ii) $\forall x \in M, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in M$

Thí dụ 3.13. *Trong $\mathbb{R}^3$. Xét $M = \{y = (y_1, y_2, 1)/y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$.*
M không là không gian vetor con của $\mathbb{R}^3$.

Chú thích 23. *Trong thực hành, để kiểm tra M là một không gian vector con , ta chỉ cần kiểm tra $M \neq \emptyset$ và $x + \alpha y \in M, \forall x, y \in M, \alpha \in \mathbb{R}$*

2.3 Không gian vetor con sinh bởi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét không gian vector $\mathbb{R}^n$ và hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$AX = 0 \tag{3.3}$$

Trong đó $A = (a_{ij})_{m\times n}; X = (x_j)_{m\times 1}; 0 = (0)_{m\times 1}$.
Khi đó, nghiệm của hệ được viết dưới dạng $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, hiển nhiên $x \in \mathbb{R}^n$.
Gọi $M = \{x/Ax = 0\}$
Khi đó M được gọi là không gian vector sinh bởi hệ $AX = 0$

Chú thích 24. *Người ta đã chứng minh được rằng không gian con sinh bởi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có một cơ sở là hệ nghiệm cơ bản và số chiều bằng với số ẩn tự do.*

Thí dụ 3.14. *Tìm cơ sở và số chiều của không gian con sinh bởi hệ phương trình thuần nhất:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 + 5x_5 & = 0 \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đây ta có $\mathrm{rank(A')} = \mathrm{rank(A)} = 2$, do vậy $\dim W = 3$, một cơ sở của W:
$B_W = \{v_1 = (-2, 1 - 0, 0, 0); v_2 = (5, 0, -2, 1, 0); v_3 = (-7, 0, 2, 0, 1)\}$

Thí dụ 3.15. *Tìm hệ thuần nhất có tập nghiệm W sinh bởi hệ:*
$\{u_1, u_2, u_3\} = \{(1, -2, 0, 3), (1, -1, -1, 4), (1, 0, -2, 5)\}$.
Gọi $v = (x, y, z, t), v \in W$ nếu và chỉ nếu v là một tổ hợp tuyến tính của $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Tức, $\exists \lambda_i, i = \overline{1,3}$ *sao cho:* $v = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i$, *từ dây, ta thu được hệ có ma trận mở rộng :*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ -2 & -1 & 0 & y \\ 0 & -1 & -2 & z \\ 3 & 4 & 5 & t \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 \to d_4 - 3d_1]{d_2 \to d_2 + 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & 2x+y \\ 0 & -1 & -2 & z \\ 0 & 1 & 2 & -3x+t \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 \to d_4 - d_2]{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & 2x+y \\ 0 & 0 & 0 & 2x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -5x-y+t \end{array}\right)$$

Từ đây, để hệ có nghiệm, chúng ta phải có :

$$\begin{cases} 2x+y+z & = 0 \\ 5x+y \quad -t & = 0 \end{cases}$$

Đây chính là hệ thuần nhất cần tìm.

2.4 Không gian vector sinh bởi hệ vector cho trước

Xét không gian vector $\mathbb{R}^n$ *và hệ m vector* $V = \{v_1, v_2, ..., v_m \in \mathbb{R}^n\}$.
Gọi W là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của m vector trên.

$$W = \left\{x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m / \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,m}\right\}.$$

Khi đó, W được gọi là không gian vector sinh bởi họ các vector V.

Thí dụ 3.16. *Tìm cơ sở và số chiều của không gian vetor sinh ra bởi hệ vector sau:*
$V = \{v_1 = (1,2,0,1,1); v_2 = (1,3,2,1,4); v_3 = (0,1,2,0,3)\}$.
Ta có ma trận vector dòng:

$$A_V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy $\operatorname{rank}(A) = 2$, *nên không gian sinh bởi hệ trên có số chiều bằng hai, một cơ sở* $\{v_1, v_2\}$

3 Không gian Euclide

Định nghĩa 3.5. *Cho KGVT V trên* $\mathbb{R}$ *. Một quy luật cho tương ứng cặp* $(x,y) \in V$ *với một số thực duy nhất, ký hiệu là* $\langle x,y \rangle$, *thỏa mãn:*

i) $\langle x,x \rangle \geq 0,\ \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

ii) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$;

iii) $\langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$;

iv) $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$

được gọi là tích vô hướng trên V.
Khi đó, V được gọi là không gian Euclide.

Thí dụ 3.17. *Trên $V = \mathbb{R}^n$, ta định nghĩa:*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

Trong đó: $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Khi đó $\langle x, y\rangle$ là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$

3.1 Độ dài của vector

Cho V là không gian Euclide. Số thực $\sqrt{\langle u, u\rangle}$ được gọi là độ dài của u . Ký hiệu là $\|u\|$.
Như vậy $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.
Vector u được gọi là vector đơn vị nếu $\|u\| = 1$.

Thí dụ 3.18. *Trên $\mathbb{R}^n$, với $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, thì $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$.*

3.2 Cơ sở trực chuẩn

Định nghĩa 3.6. *Trong không gian Euclide V , hai vector u, v được gọi là trực giao nếu $\langle u, v\rangle = 0$.*

Định nghĩa 3.7. *Cơ sở $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$ được gọi là cơ sở trực giao của V nếu $\langle u_i, u_j\rangle = 0,\ \forall i \neq j$.*

Định nghĩa 3.8. *Cơ sở $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$ được gọi là cơ sở trực chuẩn của V nếu: F trực giao và $\|u_i\| = 1, \forall i = \overline{1, n}$*

Thí dụ 3.19. *Trên $\mathbb{R}^2$, ta có:*
Hệ $\{(2; -1), (-3; -6)\}$ là cơ sở trực giao.
Hệ $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ là cơ sở trực chuẩn.

Quá trình trực chuẩn hóa Gram - Schmidt
Trong không gian Euclide V , cho trước một cơ sở $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Quá trình xây dựng một cơ sở trực chuẩn từ cơ sở V được tiến hành qua 2 bước sau:

i) *Đặt $v_1 = u_1$;*
$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1$;
$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2$;
$\ldots\ldots$,
$v_n = u_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_j\rangle}{\|v_j\|^2}v_j$.
Khi đó $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là cơ sở trực giao.

ii) Đặt $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, ..., w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$.
Khi đó, hệ $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ *là cơ sở trực chuẩn.*

Thí dụ 3.20. *Hãy trực chuẩn hóa cơ sở* $F = \{u_1 = (1; 1; 1), u_2 = (1; 0; -1), u_3 = (0; 1; -1)\}$.
Ta có:
$v_1 = u_1 = (1; 1; 1) \Rightarrow \|v_1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3;$
$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (1; 0; -1) - \frac{\langle (1;0;-1),(1;1;1)\rangle}{3}(1; 1; 1) = (1; 0; -1)$
$\Rightarrow \|v_2\|^2 = 2.$
$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$
$= (0; 1; -1) - \frac{\langle (0;1;-1),(1;1;1)\rangle}{3}(1; 1; 1) - \frac{\langle (0;1;-1),(1;0;-1)\rangle}{2}(1; 0; -1)$
$= (0; 1; -1) - \frac{1}{2}(1; 0; -1) = \left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right).$
$\Rightarrow \|v_3\|^2 = \frac{3}{2}.$
Suy ra $\left\{v_1 = (1; 1; 1), v_2 = (1; 0; -1), v_3 = \left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)\right\}$
Chuẩn hóa:
$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$
$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$
$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$
Vậy $\{w_1, w_2, w_3\}$ *là cơ sở trực chuẩn.*

Chú thích 25. *Trong không gian Euclide* V, *cho cơ sở trực chuẩn* $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$.
Với mọi $u \in V$, *tồn tại* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ *sao cho:*

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n, \tag{3.4}$$

$\Rightarrow \langle u, u_1\rangle = \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n, u_1\rangle$
$\Rightarrow \langle u, u_1\rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_1\rangle + \lambda_2 \langle u_2, u_1\rangle + ... + \lambda_n \langle u_n, u_1\rangle$
$\Rightarrow \langle u, u_1\rangle = \lambda_1.$
Tương tự, ta có: $\langle u, u_2\rangle = \lambda_2, ..., \langle u, u_n\rangle = \lambda_n$. *Khi đó* (3.4) *trở thành:*

$$u = \langle u, u_1\rangle u_1 + \langle u, u_2\rangle u_2 + ... + \langle u, u_n\rangle u_n$$

Từ đó dẫn đến:

$$[u]_F = \begin{pmatrix} \langle u, u_1\rangle \\ \langle u, u_2\rangle \\ ...... \\ \langle u, u_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Thí dụ 3.21. *Hãy trực chuẩn hóa cơ sở* $F = \{u_1 = (1; -1; 0), u_2 = (0; 1; -1), u_3 = (1; 1; -1)\}$.
Tìm tọa độ của vector $u = (1, 2, 3)$ *theo cơ sở* F.
Ta có:
$v_1 = u_1 = (1; -1; 0) \Rightarrow \|v_1\|^2 = 2;$
$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (0; 1; -1) - \frac{\langle (0;1;-1),(1;-1;0)\rangle}{2}(1; -1; 0)$

$= (0;1;-1) + \frac{1}{2}(1;-1;0) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right) \Rightarrow \|v_2\|^2 = \frac{3}{2}.$

$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{\langle u_3,v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2$

$= (1;1;-1) - \frac{\langle(1;1;-1),(1;-1;0)\rangle}{2}(1;-1;0) - \frac{2\left\langle(1;1;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)\right\rangle}{3}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$

$= (1;1;-1) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right) = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow \|v_3\|^2 = \frac{1}{3}.$

Chuẩn hóa:

$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right);$

$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}}\right);$

$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

$$\Rightarrow [u]_W = \begin{pmatrix} \langle u,w_1\rangle \\ \langle u,w_2\rangle \\ \langle u,w_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -3/\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Thí dụ 3.22. *Cho hệ ba vector* $W = \{u_1 = (1,0,-1); u_2 = (0,2,-1); u_3 = (-1,1,0)$
.

i) kiểm tra W *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$*;*

tìm $[w]_W$ *với* $w = (3,1,2)$*;*

ii) trực chuẩn hệ W*. Tìm tọa độ của* w *theo cơ sở vừa trực chuẩn.*

Ta có ma trận dòng của hệ vector : $A_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

$\det A_W = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank(A_W)} = 3$*, do vậy họ độc lập tuyến tính.*

$$[u]_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

ii) Họ trực chuẩn:

$W' = \left\{w'_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}); w'_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{6}); w'_3 = (\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})\right\}.$

Tọa độ $[w]_{W'} = (\sqrt{2},\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{10}{3})^T$

4 Bài tập

3.1. *Xác định điều kiện để vectơ x là một tổ hợp tuyến tính của u, v, w:*

i) $x = (1,m,1)$*;* $u = (1,1,0), v = (2,1,1), w = (3,2,1).$

ii) $x = (2,m+4,m+6)$*;* $u = (1,2,3), v = (3,8,11), w = (1,3,4).$

iii) $x = (2,m-4,m)$*;* $u = (1,2,3), v = (2,3,4), w = (1,3,5).$

iv) $x = (x_1,x_2,x_3)$ $u = (1,2,3), v = (2,4,5), w = (3,6,7)$

v) $x = (1, m, 1)$ $u = (1, 2, 4)\,, v = (2, 1, 5)\,, w = (3, 6, 12)$.

3.2. *Xác định điều kiện để vectơ x không phải là một tổ hợp tuyến tính của u, v, w:*

i) $x = (11, m - 9, 17)$, $u = (1, 1, 3)\,, v = (2, 2, 5)\,, w = (3, 4, 3)$

ii) $x = (1, m + 2, m + 4)$, $u = (1, 2, 3)\,, v = (3, 7, 10)\,, w = (2, 4, 6)$

iii) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u = (1, 2, 1)\,, v = (1, 1, 0)\,, w = (3, 6, 3)$

iv) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u = (1, 2, 1)\,, v = (1, 1, 0)\,, w = (3, 6, 4)$

3.3. *Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:*

i) $u = (1, 2, m)\,, v = (0, 2, m)\,, w = (0, 0, 3)$.

ii) $u = (m + 1, m, m - 1)\,, v = (2, m, 1)\,, w = (1, m, m - 1)$.

iii) $u = (m, 1, 3, 4)\,, v = (m, m, m + 2, 6)\,, w = (2m, 2, 6, m + 10)$.

iv) $u = (m, 1, 3, 4)\,, v = (m, m, m + 4, 6)\,, w = (2m, 2, 6, m + 10)$.

v) $u = (m, 1, 1, 4)\,, v = (m, m, m, 6)\,, w = (2m, 2, 2, m + 10)$

3.4. *Xác định m để các vector sau đây độc lập tuyến tính:*

i) $u = (2, 1, 1, m)\,, v = (2, 1, m, m)\,, w = (m + 2, 1, 0, 0)$.

ii) $u = (2, 1, 1, m)\,, v = (2, 1, -1, m)\,, w = (10, 5, -1, 5m)$.

iv) $u_1 = (2, 3, 1, 4)\,, u_2 = (3, 7, 5, 1)\,,\ u_3 = (8, 17, 11, m)\,, u_4\,(1, 4, 4, -3)$.

3.5. *Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$?*

i) $u_1 = (1, 2, 3); u_2 = (0, 2, 3); u_3 = (0, 0, 3)$;

ii) $u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 1, 0); u_3 = (2, 2, 1)$;

iii) $u_1 = (1, 2, 3); u_2 = (4, 5, 6); u_3 = (7, 8, 9)$;

iv) $u_1 = (1, 2, 1); u_2 = (2, 4, 2); u_3 = (1, 1, 2)$.

3.6. *Tìm m để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$:*

i) $u = (1, 2, m)\,, v = (1, m, 0)\,, w = (m, 1, 0)$.

ii) $u = (m, 1, 1)\,, v = (1, m, 1)\,, w = (1, 1, m)$.

3.7. *Tìm m để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^4$:*

i) $u_1 = (3, 1, 2, m - 1)\,,\ u_2 = (0, 0, m, 0)\,,\ u_3 = (2, 1, 4, 0)\,,\ u_4\,(3, 2, 7, 0)$.

ii) $u_1 = (1, 2, 3, 4)\,,\ u_2 = (2, 3, 4, 5)\,,\ u_3 = (3, 4, 5, 6)\,,\ u_4\,(4, 5, 6, m)$.

3.8. *Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của không gian con W của* $\mathbb{R}^3$ *sinh bởi các vectơ sau :*

i) $u_1 = (2,3,4)\,,\; u_2 = (2,6,0)\,,\; u_3 = (4,6,8).$

ii) $u_1 = (2,3,4)\,,\; u_2 = (5,-4,0)\,,\; u_3 = (7,-1,5).$

3.9. *Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của không gian con W của* $\mathbb{R}^4$*sinh bởi các vectơ sau:*

i) $u_1 = (1,2,3,4)\,,\; u_2 = (0,2,6,0)\,,\; u_3 = (0,0,1,0)\,, u_4 = (0,2,4,4)$

ii) $u_1 = (1,2,3,4)\,,\; u_2 = (0,2,6,0)\,,\; u_3 = (0,0,1,0)\,, u_4 = (1,2,4,4)$

3.10. *Tìm số chiều n = của không gian con W của* $\mathbb{R}^4$*sinh bởi các vectơ sau :*

i) $u_1 = (1,2,3,4)\,,\; u_2 = (2,3,4,5)\,,\; u_3 = (3,4,5,6)\,, u_4 = (4,5,6,7)$

ii) $u_1 = (3,1,5,7)\,,\; u_2 = (4,-1,-2,2)\,,\; u_3 = (10,1,8,17)\,, u_4 = (13,2,13,24)$

3.11. *Tìm hạng của hệ vectơ sau :*

i) $u_1 = (2,3,5,7)\,,\; u_2 = (4,1,3,2)\,,\; u_3 = (8,7,13,16)\,, u_4 = (6,4,8,9).$

ii) $u_1 = (13,1,5,7)\,,\; u_2 = (26,2,-2,2)\,,\; u_3 = (-13,-1,8,17)\,, u_4 = (0,1,13,24).$

3.12. *Định m để hệ sau có hạng bằng 2:*

i) $u = (1,3,1)\,, v = (1, m+3, 3)\,, w = (1, m+6, m+3)$

ii) $u = (m,1,0,2)\,, v = (m, m+1, -1, 2)\,, w = (2m, m+2, -1, 5).$

iii) $u = (m,1,1)\,, v = (1,m,1)\,, w = (1,1,m).$

3.13. *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ u theo cơ sở* $u_1,\ u_2,\ u_3$.

i) $u = (1,2,4)\,; u_1 = (1,0,0)\,, u_2 = (0,1,0)\,, u_3 = (0,0,1).$

ii) $u = (m,0,1)\,; u_1 = (0,0,1)\,, u_2 = (0,1,0)\,, u_3 = (1,0,0).$

iii) $u = (2,3,6)\,; u_1 = (1,2,3)\,, u_2 = (1,3,4)\,, u_3 = (2,4,7).$

iv) $u = (m,0,1)\,; u_1 = (1,0,0)\,, u_2 = (1,1,0)\,, u_3 = (0,-1,1).$

v) $u = (m,m,4m)\,; u_1 = (1,2,3)\,, u_2 = (3,7,9)\,, u_3 = (5,10,16).$

vi) $u = (1,2m,2)\,; u_1 = (1,0,0)\,, u_2 = (0,2,0)\,, u_3 = (2,1,1).$

3.14. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho tập hợp* $V = \left\{ x = (x_1,\ x_2,\ x_3)\,/ \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \end{array} \right. \right\}.$

i) Chứng minh V là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

ii) Tìm một cơ sở của V.

iii) Chứng minh véc tơ $u = (3, -1, 1)$ *thuộc V. Xác định tọa độ của u đối với cơ sở vừa tìm được ở câu ii).*

3.15. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho tập hợp* $V = \{x = (x_1,\, x_2,\, x_3)\,/x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.

i) Chứng minh V là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

ii) Tìm một cơ sở của V.

iii) Chứng minh véc tơ $u = (1, 2, 7)$ *thuộc V. Xác định tọa độ của u đối với cơ sở vừa tìm được ở câu ii).*

3.16. *Trong không gian* $\mathbb{R}^2$ *cho hệ vectơ :* $B = \{u_1, u_2\}$*.Tìm ma trận trận chuyển cơ sở, từ cơ sở chính tắc* B_0 *sang cơ sở* $B = \{u_1, u_2\}$ *và ngược lại.*

i) $u_1 = (2, 1)\,, u_2 = (-1, -1)$.

ii) $u_1 = (2, 1)\,,\ u_2 = (-1, 1)\,,$

iii) $u_1 = (-1, 0)\,,\ u_2 = (0, 1),$

iv) $u_1 = (1, 2)\,,\ u_2 = (3, 4)$.

3.17. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho hệ vectơ :* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$*.Tìm ma trận trận chuyển cơ sở, từ cơ sở chính tắc* B_0 *sang cơ sở* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$*và ngược lại.*

i) $u_1 = (1, 0, 1)\,, u_2 = (0, 1, 1)\,, u_3 = (0, 0, 1)$.

ii) $u_1 = (0, 1, 1)\,, u_2 = (1, 0, 1)\,, u_3 = (1, 1, 0)$.

iii) $u_1 = (1, 2, 1)\,, u_2 = (-1, -1, 1)\,, u_3 = (0, 1, 1)$.

iv) $u_1 = (4, 2, 1)\,, u_2 = (0, 1, -2)\,, u_3 = (1, 2, 1)$

3.18. *Trong không gian* $\mathbb{R}^2$ *, tìm ma trận trận chuyển cơ sở* $B_1 = \{u_1, u_2\}$ *sang cơ sở* $B_2 = \{v_1, v_2\}$ *và ngược lại.*

i) $u_1 = (2, 1)\,, u_2 = (-1, -1)\,,\ v_1 = (-1, 0)\,, v_2 = (0, 1)$.

ii) $u_1 = (2, 1)\,, u_2 = (3, 2)\,,\ v_1 = (-1, 7)\,, v_2 = (8, 1)$.

iii) $u_1 = (12, 13)\,, u_2 = (1, 1)\,,\ v_1 = (1, -1)\,, v_2 = (3, 1)$.

3.19. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *, tìm ma trận trận chuyển cơ sở* $B_1 = \{u_1, u_2,\, u_3\}$ *sang cơ sở* $B_2 = \{v_1, v_2,\, v_3\}$ *và ngược lại.*

i) $u_1 = (1, 0, 0)\,, u_2 = (0, -1, 0)\,, u_3 = (0, 0, -1)\,;\ v_1 = (1, 0, 1)\,, v_2 = (0, 1, 1)\,, v_3 = (0, 0, 1)$.

ii) $u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (1, -1, 3), u_3 = (1, 1, -1),\ v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1)$.

iii) $u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (1, -1, 3), u_3 = (1, 1, -1),\ v_1 = (1, 1, 3), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (7, 1, 1)$.

3.20. *i) Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở Bsang cơ sở chính tắc B_0 của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (1, 0, 1)$ theo cơ sở B.*

ii) Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang cơ sở chính tắc B_0 của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (1, 2, 3)$ theo cơ sở B.

iii) Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang cơ sở chính tắc B_0 của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (-1, 8, 1)$ theo cơ sở B.

3.21. *i) Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở B của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (2, 1, 0)$ theo cơ sở B.*

ii) Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc B_0sang cơ sở B của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (2, 3, 3)$ theo cơ sở B

3.22. *i) Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2 của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và tọa độ của vectơ u theo cơ sở B_1 là $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$. Tìm vectơ $[u]_{B_2}$.*

ii) Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2 của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ và tọa độ của vectơ u theo cơ sở B_1 là $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3$. Tìm vectơ u.

iii) Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2 của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ và tọa độ của vectơ u theo cơ sở B_1 là $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Tìm vectơ u.

iv) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ :$u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,-1,0), u_3 = (0,0,-1)$ Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$là $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và tọa độ vectơ u theo cơ sở B_1 là $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$. Tìm vectơ u.

3.23. *i) Trong không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng 5 ($P_5[x]$) cho cơ sở $F = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. Tọa độ của $p(x) = x^5 - 1$ đối với F.*

ii) Trong không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng 5 ($P_5[x]$) cho cơ sở $F = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4, (x-1)^5\right\}$. Tọa độ của $p(x) = x^5 + 4x^4 + 3x - 1$ đối với F.

iii) Trong không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng 5 ($P_5[x]$) cho cơ sở $F = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4, (x-1)^5\right\}$. Tọa độ của $p(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 + x - 5$ đối với F.

iv) Trong không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng 5 ($P_5[x]$) cho cơ sở $F = \left\{1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2!}, \frac{(x-1)^3}{3!}, \frac{(x-1)^4}{4!}, \frac{(x-1)^5}{5!}\right\}$. Tọa độ của $p(x) = 6x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x - 5$ đối với F.

v) Trong không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng 5 ($P_5[x]$) cho cơ sở $F = \left\{1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2}, \frac{(x-1)^3}{3}, \frac{(x-1)^4}{4}, \frac{(x-1)^5}{5}\right\}$. Tọa độ của $p(x) = 6x^5 + 14x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 5$ đối với F.

3.24. *i) Trong không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng 4 ($P_4[x]$) cho hai cơ sở $E = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ và $F = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4\right\}$. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E đến F và ngược lại.*

ii) Trong không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng 4 ($P_4[x]$) cho hai cơ sở $E = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ và $F = \left\{1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2!}, \frac{(x-1)^3}{3!}, \frac{(x-1)^4}{4!}\right\}$. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E đến F và ngược lại.

3.25. *Trong không gian vecto trang bị tích vô hướng Euclid, hãy áp dụng quá trình Gram-Smith, chuyển các cơ sở sau đây thành cơ sở trực chuẩn, tìm tọa độ của v trong cơ sở vừa trực chuẩn:*

i) $u_1 = (1, 3); u_2 = (2, 2); v = (-3, 4)$;

ii) $u_1 = (1, 0); u_2 = (3, -5); v = (0, 5)$;

iii) $u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (-1, 1, 0); u_3 = (1, 2, 1); v = (1, 2, 1)$;

iv) $u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (3, 7, -2); u_3 = (0, 4, 1); v = (-1, 2, 0)$.

3.26. *Tìm một cơ sở và số chiều của không gian của các nghiệm của các hệ phương trình sau:*

i) $\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t & = 0 \\ -x + y + 3z - 4t & = 0 \\ x + 4y + 4z - 2t & = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 2y + z - t & = 0 \\ y - 2z + 3t & = 0 \\ x + 3y - z + 2t & = 0 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x + 3y - z & = 0 \\ -2x - y + 2z & = 0 \\ -x + 2y + z & = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 3y - 4z + 2t & = 0 \\ -x - 2y + 3z - t & = 0 \\ 3x + 10y - 13z + 7t & = 0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x + y + z + t & = 0 \\ -2x + 3y - z + 2t & = 0 \\ -x + 4y + 3t & = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y - z - 3t & = 0 \\ 2x - y + 4z - 2t & = 0 \\ 3x + 3z - 5t & = 0 \\ x - 2y + 5z + t & = 0 \end{cases}$

3.27. *Trong không gian vector tương ứng, cho không gian vecto sau, hãy tìm cơ sở và số chiều của không gian tổng và không gian tích tương ứng*

i) $V =< (1, 2, 3); (-1; 0; 2) >; W =< (1, 2, -3); (-2, 0, 3); (-1, 2, 0) >$

ii) $V =< (1, 2, -3, 0); (1, 0, 1, 1); (0, 2, -3, 1) >; W =< (1, -2, 0, 1); (-2, 0, 0, 1) >$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 217. *Xác định m để vectơ* $(1, m, 1)$ *là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 1, 0), v = (2, 1, 1), w = (3, 2, 1)$

A. $m \neq 0, 1$. **B**. $m = 1$. **C**. $m = 0$. **D**. $m = -1$.

Câu 218. *Xác định m để vectơ* $(2, m + 4, m + 6)$ *là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 2, 3), v = (3, 8, 11), w = (1, 3, 4)$

A. $m = 0$. **B**. $m = 1$.
C. *m tùy ý.* **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 219. *Xác định m để vectơ* $(m, 2m + 2, m + 3)$ *là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (3, 6, 3), v = (2, 5, 3), w = (1, 4, 3)$

A. $m = 2$. **B**. $m = 4$.
C. *m tùy ý.* **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 220. *Tìm điều kiện để vectơ* (x_1, x_2, x_3) *là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 2, 3), v = (2, 4, 5), w = (3, 6, 7)$

A. $x_3 = x_1 + x_2$. **B**. $x_1 = 2x_2$.
C. $2x_1 = x_2$. **D**. x_3, x_1, x_2 *tùy ý*.

Câu 221. *Tìm điều kiện để vectơ* (x_1, x_2, x_3)*là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 2, 3), v = (2, 4, 6), w = (3, 5, 7)$.

A. $x_3 = 2x_2 - x_1$. **B**. $x_1 = 2x_2$.
C. $2x_1 = x_2$. **D**. $6x_1 = 3x_2 = 2x_3$.

Câu 222. *Tìm điều kiện để vectơ* (x_1, x_2, x_3)*là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 0, 2), v = (1, 2, 8), w = (2, 3, 13)$.

A. $x_3 = -2x_1 - 3x_2$. **B**. $x_3 = 2x_1 + 3x_2$.
C. $x_3 = 2x_1 - 3x_2$. **D**. x_3, x_1, x_2 *tùy ý*.

Câu 223. *Tìm điều kiện để vectơ* (x_1, x_2, x_3)*là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 2, 4), v = (3, 6, 12), w = (4, 8, 16)$.

A. $4x_1 = 2x_2 = x_3$. **B**. $4x_1 = x_2 = x_3$.
C. $4x_1 = x_2 = 2x_3$. **D**. x_3, x_1, x_2 *tùy ý*.

Câu 224. *Tìm điều kiện để vectơ* (x_1, x_2, x_3)*là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 3, 1), v = (2, 1, 2), w = (0, 1, 1)$.

A. $x_1 = x_3$. **B**. $3x_1 = x_2$.
C. $3x_1 = x_2 = 3x_3$. **D**. x_3, x_1, x_2 *tùy ý*.

Câu 225. *Tìm m để vectơ* $(1, m, 1)$ *không phải là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 2, 4), v = (2, 1, 5), w = (3, 6, 12)$.

A. $m \neq 0, \pm 1$. **B**. $m \neq 0$.
C. $m \neq -1$. **D**. m *tùy ý*.

Câu 226. *Xác định m để vectơ* $(1, m, 1)$*không phải là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 1, 3), v = (2, 2, 5), w = (3, 4, 3)$.

A. $m \neq 0, \pm 1$. **B**. $m \neq 0$.
C. m *tùy ý*. **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 227. *Xác định m để vectơ* $(1, m+2, m+4)$ *không phải là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 2, 3), v = (3, 7, 10), w = (2, 4, 6)$.

A. $m \neq 0, \pm 1$. **B**. $m \neq 0$.
C. $m \neq 1$. **D**. m *tùy ý*.

Câu 228. *Tìm điều kiện để vectơ* (x_1, x_2, x_3)*không phải là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 2, 1), v = (1, 1, 0), w = (3, 6, 3)$.

A. $3x_1 = x_2 + x_3$. **B**. $x_2 \neq x_1 + x_3$.
C. $3x_1 \neq x_2 + x_3$. **D**. *Không có giá trị nào của* x_3, x_1, x_2.

Câu 229. *Tìm điều kiện để vectơ* (x_1, x_2, x_3) *không phải là một tổ hợp tuyến tính của* $u = (1, 2, 1), v = (1, 1, 0), w = (3, 6, 4)$.

A. $3x_1 = x_2 + x_3$. **B**. $x_1 \neq x_2 + x_3$.
C. $3x_1 \neq x_2 + x_3$. **D**. *Không có giá trị nào của* x_3, x_1, x_2.

Câu 230. *Cho các vectơ* u_1, u_2, u_3 *độc lập tuyến tính trong* $\mathbb{R}^4$ *và* θ *là vectơ không của* $\mathbb{R}^4$. *Trong 4 mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?*

A. u_1, u_2, θ *độc lập tuyến tính.*
B. u_1, u_3, θ *độc lập tuyến tính.*
C. u_2, u_3, θ *độc lập tuyến tính.*
D. u_1, u_2, u_3, θ *phụ thuộc tuyến tính.*

Câu 231. *Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:* $u = (1, 2, m), v = (0, 2, m), w = (0, 0, 3)$

A. $m = 1$. **B**. $m = 0$.
C. m *tùy ý.* **D**. *Không có m nào thỏa.*

Câu 232. *Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:* $u = (m + 1, m, m - 1), v = (2, m, 1), w = (1, m, m - 1)$

A. $m = 2$. **B**. $m = 0$.
C. $m = 2 \vee m = 0$. **D**. $m = 1 \vee m = 2$.

Câu 233. *Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:* $u = (m, 1, 3, 4), v = (m, m, m + 2, 6), w = (2m, 2, 6, m + 10)$

A. $m = 1$. **B**. $m = -2$.
C. $m = 1 \vee m = -2$. **D**. $m = 0 \vee m = 1 \vee m = -2$.

Câu 234. *Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:* $u = (m, 1, 3, 4), v = (m, m, m + 4, 6), w = (2m, 2, 6, m + 10)$

A. $m = 1$. **B**. $m = -2$.
C. $m = 1 \vee m = -2$. **D**. $m = 0 \vee m = 1 \vee m = -2$.

Câu 235. *Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:* $u = (m, 1, 1, 4), v = (m, m, m, 6), w = (2m, 2, 2, m + 10)$

A. $m = 1$. **B**. $m = -2$.
C. $m = 1 \vee m = -2$. **D**. $m = 0 \vee m = 1 \vee m = -2$.

Câu 236. *Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:* $u = (m, 1, 3, 4), v = (m, m, m + 2, 6), w = (2m, 2, 6, 10)$

A. $m = 1$. **B**. $m = -2$.
C. $m = 1 \vee m = -2$. **D**. $m = 0 \vee m = 1 \vee m = -2$.

Câu 237. *Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:* $u = (m, 1, 3, 4), v = (m, m, m + 2, 6), w = (2m, 2, 7, 10)$

A. $m = 0$. **B**. $m = 1$.
C. $m = 1 \vee m = 0$. **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 238. *Xác định m các vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:* $u_1 = (2, 3, 1, 4), u_2 = (4, 11, 5, 10), u_3 = (6, 14, m + 5, 18), u_4 = (2, 8, 4, 7)$

A. $m = 1$. **B**. $m = 2$.
C. $m = 1 \vee m = 0$. **D**. $m = 1 \vee m = 2$.

Câu 239. *Xác định m các vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:* $u_1 = (1, 2, 1, 4), u_2 = (2, 3, m, 7), u_3 = (5, 8, 2m + 1, 19), u_4 = (4, 7, m + 2, 15)$

A. $m = 1$. **B**. $m = 2$.
C. *m tùy ý*. **D**. *Không có giá trị m nào*.

Câu 240. *Xác định m để 3 vector sau đây độc lập tuyến tính:* $u = (m + 1, 1, m + 1), v = (1, 1, 1), w = (2, 0, m + 2)$

A. $m \neq 0; \pm 1$. **B**. $m \neq 0$. **C**. $m \neq 1$. **D**. $m = \pm 1$.

Câu 241. *Xác định m để 3 vector sau đây độc lập tuyến tính:* $u = (m + 2, 3, 2), v = (1, m, 1), w = (m + 2, 2m + 1, m + 2)$

A. $m \neq 0; \pm 1$. **B**. $m \neq 0; 1$. **C**. $m \neq 0; -1$. **D**. $m = 0, \pm 1$.

Câu 242. *Xác định m để 3 vector sau đây độc lập tuyến tính:* $u = (2, 1, 1, m), v = (2, 1, 4, m), w = (m, 1, 0, 0)$

A. $m \neq 0$. **B**. $m \neq 0; 1$. **C**. $m \neq 0; 2$. **D**. *m tùy ý*.

Câu 243. *Xác định m để 3 vector sau đây độc lập tuyến tính:* $u = (2, 1, 1, m), v = (2, 1, 4, m), w = (m + 2, 1, 0, 0)$

A. $m \neq 0$. **B**. $m \neq 0; 1$. **C**. $m \neq 0; 2$. **D**. $m = 0, 1; 2$.

Câu 244. *Xác định m để 3 vector sau đây độc lập tuyến tính:* $u = (2, 1, 1, m), v = (2, 1, m, m), w = (m + 2, 1, 0, 0)$

A. $m \neq 0$. **B**. $m \neq 0; 1$. **C**. $m \neq 0; 2$. **D**. $m = 0; 1; 2$.

Câu 245. *Xác định m để 3 vector sau đây độc lập tuyến tính:* $u = (2, 1, 1, m), v = (2, 1, -1, m), w = (10, 5, -1, 5m)$

A. $m \neq 0$. **B**. $m \neq 0; 1$.
C. *m tùy ý*. **D**. *Không có giá trị m nào*.

Câu 246. *Xác định m các vector sau đây độc lập tuyến tính:* $u_1 = (2, 3, 1, 4), u_2 = (3, 7, 5, 1), u_3 = (8, 17, 11, m), u_4 = (1, 4, 4, -3)$

A. $m \neq 6$. **B**. $m \neq -6$.
C. *m tùy ý*. **D**. *Không có giá trị m nào*.

Câu 247. *Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$*?*

A. $(1, 2, 3); (0, 2, 3); (0, 0, 3)$.
B. $(1, 1, 1); (1, 1, 0); (2, 2, 1)$.
C. $(1, 2, 3); (4, 5, 6); (7, 8, 9)$.
D. $(1, 2, 1); (2, 4, 2); (1, 1, 2)$.

Câu 248. *Tìm m để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$*:* $u = (1, 2, m)\,, v = (1, m, 0)\,, w = (m, 1, 0)$

A. $m \neq 0; \pm 1$. **B**. $m \neq 0$. **C**. $m \neq 1$. **D**. $m = \pm 1$.

Câu 249. *Tìm m để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$*:* $u = (m, 1, 1)\,, v = (1, m, 1)\,, w = (1, 1, m)$

A. $m \neq 0; \pm 1$. **B**. $m \neq -2$. **C**. $m \neq -2, 1$. **D**. $m = \pm 1$.

Câu 250. *Tìm m để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$*:* $u = (1, 2, 3)\,, v = (m, 2m + 3, 3m + 3)\,, w = (1, 4, 6)$

A. $m \neq 1$. **B**. $m \neq 0$. **C**. *Không có giá trị m nào.* **D**. *m tùy ý.*

Câu 251. *Tìm m để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$*:* $u = (1, 2, m)\,, v = (m, 2m + 3, 3m + 3)\,, w = (4, 3m + 7, 5m + 3)$

A. $m \neq 1$. **B**. $m \neq 2$.
C. *Không có giá trị m nào.* **D**. *m tùy ý.*

Câu 252. *Tìm m để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^4$ $u_1 = (3, 1, 2, m - 1)\,, u_2 = (0, 0, m, 0)\,; u_3 = (2, 1, 4, 0)\,, u_4\,(3, 2, 7, 0)$

A. $m \neq 0, 1$. **B**. $m \neq 2$.
C. *m tùy ý.* **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 253. *Tìm m để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^4$ $u_1 = (1, 2, 3, 4)\,, u_2 = (2, 3, 4, 5)\,; u_3 = (3, 4, 5, 6)\,, u_4\,(4, 5, 6, m)$

A. $m \neq 0$. **B**. $m \neq 1$.
C. *m tùy ý.* **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 254. *Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của không gian con W của* $\mathbb{R}^3$*sinh bởi các vectơ sau* $u_1 = (2, 3, 4)\,,\ u_2 = (2, 6, 0)\,,\ u_3 = (4, 6, 8)$.

A. u_1, u_2. **B**. u_1, u_3.
C. u_1. **D**. u_1, u_2, u_3.

Câu 255. *Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của không gian con W của* $\mathbb{R}^3$*sinh bởi các vectơ sau* $u_1 = (2, 3, 4)\,,\ u_2 = (5, -4, 0)\,,\ u_3 = (7, -1, 5)$.

A. u_1, u_2. **B**. u_2, u_3.
C. u_1, u_3. **D**. u_1, u_2, u_3.

Câu 256. *Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của không gian con W của* $\mathbb{R}^3$ *sinh bởi các vectơ sau* $u_1 = (1, 2, 4)\,,\ u_2 = (0, 1, 2)\,,\ u_3 = (0, 0, 1)\,, u_4 = (0, 0, 2)$.

A. u_1, u_2. **B**. u_2, u_3.
C. u_1, u_2, u_3. **D**. u_2, u_3, u_4.

Câu 257. *Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của không gian con* W *của* $\mathbb{R}^4$ *sinh bởi các vectơ sau* $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (0, 2, 6, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, 0)$, $u_4 = (1, 2, 4, 4)$.

A. u_1, u_2. **B**. u_2, u_3.
C. u_1, u_2, u_3. **D**. u_1, u_3, u_4.

Câu 258. *Tìm số chiều* $n = \dim W$ *của không gian con* W *của* $\mathbb{R}^4$ *sinh bởi các vectơ sau* $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (2, 3, 4, 5)$, $u_3 = (3, 4, 5, 6)$, $u_4 = (4, 5, 6, 7)$
A. $n = 1$. **B**. $n = 2$. **C**. $n = 3$. **D**. $n = 4$.

Câu 259. *Tìm số chiều* $n = \dim W$ *của không gian con* W *của* $\mathbb{R}^4$ *sinh bởi các vectơ sau* $u_1 = (2, 2, 3, 4)$, $u_2 = (1, 3, 4, 5)$, $u_3 = (3, 5, 7, 9)$, $u_4 = (4, 8, 11, 15)$
A. $n = 1$. **B**. $n = 2$. **C**. $n = 3$. **D**. $n = 4$.

Câu 260. *Tìm số chiều* $n = \dim W$ *của không gian con* W *của* $\mathbb{R}^4$ *sinh bởi các vectơ sau* $u_1 = (2, 2, 3, 4)$, $u_2 = (4, 4, 6, 8)$, $u_3 = (6, 6, 9, 12)$, $u_4 = (8, 8, 12, 16)$
A. $n = 1$. **B**. $n = 2$. **C**. $n = 3$. **D**. $n = 4$.

Câu 261. *Tìm số chiều* $n = \dim W$ *của không gian con* W *của* $\mathbb{R}^4$ *sinh bởi các vectơ sau* $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (2, 0, 6, 0)$, $u_3 = (6, 6, 7, 0)$, $u_4 = (8, 0, 0, 0)$
A. $n = 1$. **B**. $n = 2$. **C**. $n = 3$. **D**. $n = 4$.

Câu 262. *Tìm hạng của hệ vectơ sau :* $u_1 = (3, 1, 5, 7)$, $u_2 = (4, -1, -2, 2)$, $u_3 = (10, 1, 8, 17)$, $u_4 = (13, 2, 13, 24)$
A. $r = 1$. **B**. $r = 2$. **C**. $r = 3$. **D**. $r = 4$.

Câu 263. *Tìm hạng của hệ vectơ sau :* $u_1 = (2, 3, 5, 7)$, $u_2 = (4, 1, 3, 2)$, $u_3 = (8, 7, 13, 16)$,
$u_4 = (6, 4, 8, 9)$
A. $r = 1$. **B**. $r = 2$. **C**. $r = 3$. **D**. $r = 4$.

Câu 264. *Tìm hạng của hệ vectơ sau :* $u_1 = (1, 1, 5, 7)$, $u_2 = (1, -1, -2, 2)$, $u_3 = (2, 2, 10, 17)$, $u_4 = (3, 3, 15, 24)$
A. $r = 1$. **B**. $r = 2$. **C**. $r = 3$. **D**. $r = 4$.

Câu 265. *Định* m *để hệ sau có hạng bằng 2:* $u = (1, 3, 1)$, $v = (1, m + 3, 3)$, $w = (1, m + 6, m + 3)$
A. $m = 0$. **B**. $m = 1$. **C**. $m = 0 \vee m = 1$. **D**. m *tùy ý*.

Câu 266. *Định* m *để hệ sau có hạng bằng 2:* $u = (m, 1, 0, 2)$, $v = (m, m + 1, -1, 2)$, $w = (2m, m + 2, -1, 5)$
A. $m = -\sqrt{6}$. **B**. $m = \sqrt{6}$. **C**. $m = \pm\sqrt{6}$. **D**. m *tùy ý* .

Câu 267. *Định m để hệ sau có hạng bằng 3:* $u = (m, 1, 0, 2), v = (m, m + 2, 0, 2), w = (2m, m + 3, 1, 4)$

A. $m = 0$.
B. $m = -1$.
C. $m \neq 0, -1$.
D. *Không có giá trị m nào.*

Câu 268. *Định m để hệ sau có hạng bằng 3:* $u = (m, 1, 0, 2), v = (m, m + 2, 0, 2), w = (2m, m + 3, 0, 5)$

A. $m = 0$.
B. $m = -1$.
C. $m \neq 0, -1$.
D. *Không có giá trị m nào.*

Câu 269. *Định m để hệ sau có hạng bằng 3:* $u = (m, 1, 0, 2), v = (m, m + 2, 0, 2), w = (2m, m + 3, 0, 4)$

A. $m = 0$.
B. $m = -1$.
C. $m \neq 0, -1$.
D. *Không có giá trị m nào.*

Câu 270. *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (1, 2, 4)$ *theo cơ sở* $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)$

A. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2$.
B. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$.
C. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.
D. $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$.

Câu 271. *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (m, 0, 1)$ *theo cơ sở* $u_1 = (0, 0, 1), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)$

A. $x_1 = m, x_2 = 0, x_3 = 1$.
B. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = m$.
C. $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = m$.
D. $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = m$.

Câu 272. *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (3, 3, 4)$ *theo cơ sở* $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, -3, 0), u_3 = (0, 0, 2)$

A. $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 4$.
B. $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 4$.
C. $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 2$.
D. $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$.

Câu 273. *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (1, 2, 1)$ *theo cơ sở* $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 1)$

A. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$.
B. $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$.
C. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$.
D. $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 3$.

Câu 274. *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (2, 3, 6)$ *theo cơ sở* $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (1, 3, 4), u_3 = (2, 4, 7)$

A. $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0$.
B. $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 2$.
C. $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 3$.
D. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Câu 275. *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (m, 0, 1)$ *theo cơ sở* $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, -1, 1)$

A. $x_1 = m, x_2 = 0, x_3 = 1$.
B. $x_1 = m, x_2 = 0, x_3 = 0$.
C. $x_1 = m - 2, x_2 = 2, x_3 = 2$.
D. $x_1 = m - 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Câu 276. *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (m, m, 4m)$ *theo cơ sở* $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (3, 7, 9), u_3 = (5, 10, 16)$

A. $x_1 = 0, x_2 = -m, x_3 = 4m/5$. **B**. $x_1 = m, x_2 = m, x_3 = m$.
C. $x_1 = -m, x_2 = -m, x_3 = m$. **D**. $x_1 = 4m, x_2 = -m, x_3 = 0$.

Câu 277. *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (1, 2m, 2)$ *theo cơ sở* $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 2, 0), u_3 = (2, 1, 1)$

A. $x_1 = 1, x_2 = m, x_3 = 0$. **B**. $x_1 = 1, x_2 = m, x_3 = 0$.
C. $x_1 = -3, x_2 = 2m - 2, x_3 = 1$. **D**. $x_1 = -3, x_2 = m - 1, x_3 = 2$.

Câu 278. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho các vectơ :* $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (1, 3, 3)$. *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. u_1, u_2, u_3 *độc lập tuyến tính.*
B. u_1, u_2, u_3 *phụ thuộc tuyến tính.*
C. u_1, u_2, u_3 *tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$.
D. *Hệ các vectơ* u_1, u_2, u_3 *có hạng bằng 3.*

Câu 279. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho các vectơ phụ thuộc vào tham số m:* $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, m, 1), u_3 = (1, 1, m)$ *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. u_1, u_2, u_3 *độc lập tuyến tính khi và chỉ khi* $m = 1$.
B. u_1, u_2, u_3 *phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi* $m = 0$.
C. u_1, u_2, u_3 *tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$ *khi* $m \neq 1$.
D. *Hệ các vectơ* u_1, u_2, u_3 *luôn có hạng bằng 3.*

Câu 280. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho các vectơ phụ thuộc vào tham số m:* $u_1 = (1, 2, m), u_2 = (2, 4, 0), u_3 = (0, 0, 7)$ *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. u_1, u_2, u_3 *luôn độc lập tuyến tính.*
B. u_1, u_2, u_3 *phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi* $m = 0$.
C. u_1, u_2, u_3 *tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$ *khi* $m \neq 0$.
D. *Hệ các vectơ* u_1, u_2, u_3 *luôn có hạng bằng 2.*

Câu 281. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho các vectơ phụ thuộc vào tham số m :* $u_1 = (1, 2, m), u_2 = (3, 4, 3m), u_3 = (0, 1, 7)$ *Khẳng định nào sau đây là đúng?*

A. u_1, u_2, u_3 *luôn luôn độc lập tuyến tính.*
B. u_1, u_2, u_3 *luôn luôn phụ thuộc tuyến tính.*
C. u_1, u_2, u_3 *tạo thành một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$ *khi và chỉ khi* $m \neq 0$.
D. *Hệ các vectơ* u_1, u_2, u_3 *luôn có hạng bằng 2.*

Câu 282. *Trong không gian* $\mathbb{R}^2$ *cho các vectơ :* $u_1 = (2, 1), u_2 = (-1, -1)$. *Tìm ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc* B_0 *sang cơ sở* $B = \{u_1, u_2\}$ *của* $\mathbb{R}^2$.

A. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **B**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
C. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ \$. **D**. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Câu 283. *Trong không gian* $\mathbb{R}^2$ *cho các vectơ :* $u_1 = (2,1)\,, u_2 = (-1,-1)$. *Tìm ma trận trận chuyển cơ sở* $B = \{u_1, u_2\}$ *sang cơ sở chính tắc* B_0 *của* $\mathbb{R}^2$.

A. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **B**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

C. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. **D**. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Câu 284. *Trong không gian* $\mathbb{R}^2$ *cho các vectơ :* $u_1 = (2,1)\,, u_2 = (-1,-1)\,; v_1 = (-1,0)\,; v_2 = (0,1)$ *Tìm ma trận trận chuyển cơ sở* $B_1 = \{u_1, u_2\}$ *sang cơ sở* $B_2 = \{v_1, v_2\}$ *của* $\mathbb{R}^2$

A. $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. **B**. $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

C. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **D**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Câu 285. *Trong không gian* $\mathbb{R}^2$ *cho các vectơ :* $u_1 = (2,1)\,, u_2 = (-1,-1)\,; v_1 = (-1,0)\,; v_2 = (0,1)$

Tìm ma trận trận chuyển cơ sở $B_2 = \{v_1, v_2\}$*sang cơ sở*$B_1 = \{u_1, u_2\}$ *của* $\mathbb{R}^2$

A. $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. **B**. $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

C. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **D**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Câu 286. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho các vectơ :* $u_1 = (1,0,1)\,, u_2 = (0,1,1)\,, u_3 = (0,0,1)$ *Tìm ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc*B_0 *sang cơ sở*$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *của*$\mathbb{R}^3$

A. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **B**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

C. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **D**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 287. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho các vectơ :*$u_1 = (1,0,1)\,, u_2 = (0,1,1)\,, u_3 = (0,0,1)$ *Tìm ma trận trận chuyển cơ sở* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *sang cơ sở* B_0 *của* $\mathbb{R}^3$

A. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **B**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

C. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **D**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 288. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho các vectơ :* $u_1 = (1,0,0)\,; u_2 = (0,-1,0)\,, u_3 = (0,0,-1)\,; v_1 = (1,0,1)\,, v_2 = (0,1,1)\,, v_3 = (0,0,1)$ *Tìm ma trận chuyển cơ sở* $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ *sang cơ sở* $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ *của* $\mathbb{R}^3$

A. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **B**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

C. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **D**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Câu 289. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho các vectơ :* $u_1 = (1,0,0)\,, u_2 = (0,-1,0)\,, u_3 = (0,0,-1)\,; v_1 = (1,0,1)\,, v_2 = (0,1,1)\,, v_3 = (0,0,1)$. *Tìm ma trận trận chuyển cơ sở* $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ *sang cơ sở* $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ *của* $\mathbb{R}^3$

A. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **B**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

C. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **D**. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Câu 290. *Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở* B *sang cơ sở chính tắc* B_0 *của* $\mathbb{R}^3$ *là* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (1,0,1)$ *theo cơ sở* B

A. $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 2$. **B**. $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

C. $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -2$. **D**. *Các kết qủa trên đều sai.*

Câu 291. *Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc* B_0*sang cơ sở* B *của* $\mathbb{R}^3$ *là* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (2,1,0)$ *theo cơ sở* B

A. $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0$. **B**. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1$.

C. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$. **D**. *Các kết qủa trên đều sai.*

Câu 292. *Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc* B_0 *sang cơ sở* B *của* $\mathbb{R}^3$ *là* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Tìm tọa độ* x_1, x_2, x_3 *của vectơ* $u = (2,3,3)$ *theo cơ sở* B

A. $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0$. **B**. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1$.

C. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$. **D**. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$.

Câu 293. *Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở* B_1*sang cơ sở* B_2 *của* $\mathbb{R}^3$ *là* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *và tọa độ của vectơ u theo cơ sở* B_1 *là* $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$ *.Tìm vectơ u. Khẳng định nào sau đây là đúng ?*

A. u=$(1,1,-2)$. **B**. $u = (1,1,2)$.

C. *Chưa thể xác định được u vì u phụ thuộc vào các vectơ trong cơ sở* B_2 . **D**. *Các khẳng định trên đều sai.*

Câu 294. *Trong không gian* $\mathbb{R}^3$ *cho các vectơ :* $u_1 = (1,0,0)\,, u_2 = (0,-1,0)\,, u_3 = (0,0,-1)$ *Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở* B_1 *sang cơ sở* $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ *của* $\mathbb{R}^3$ *là* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *và tọa độ vectơ u theo cơ sở* B_1 *là* $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$.
Tìm vectơ u. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $u = (1, -1, 0)$.
B. $u = (1, 1, 0)$.
C. *Chưa thể xác định được u vì u phụ thuộc vào các vectơ trong cơ sở* B_1 .
D. *Các khẳng định trên đều sai.*

Câu 295. *Trong* $\mathbb{R}^3$ *cho cơ sở* $F = \{f_1 = (2; -1; 5), f_2 = (1; -1; 3), f_3 = (1; -2; 5)\}$. *Tọa độ của véctơ x=(7, 0, 7) đối với cơ sở F là:*

A. $(0; 14; 7)$.
B. $(0; -14; -7)$.
C. $(0; 14; -7)$.
D. $(14; 7; 2007)$.

Câu 296. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *cho hai cơ sở* $G = \{g_1 = (1; 2), g_2 = (2; 1)\}$ *và* $H = \{h_1 = (2; 3), h_2 = (1; 2)\}$. *Ma trận chuyển cơ sở từ G sang H là:*

A. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 4/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Câu 297. *Trong* $\mathbb{R}^3$ *cho cơ sở* $F = \{f_1 = (1; 1; 1),\ f_2 = (1; 1; 0),\ f_3 = (1; 0; 0)\}$. *Tọa độ của véctơ x=(12,14,16) đối với cơ sở F là:*

A. $(-16; -2; 2)$.
B. $(16; -2; 2)$.
C. $(-16; -2; -2)$.
D. $(16; -2; -2)$.

Câu 298. *Trong* $\mathbb{R}^3$, *cho hai cơ sở* $E = \{e_1 = (1; 0; 0), e_2 = (0; 1; 0), e_3 = (0; 0; 1)\}$ *và* $F = \{f_1 = (-1; 0; 0), f_2 = (-1; -1; 0), f_3 = (-1; -1; -1)\}$. *Ma trận chuyển cơ sở từ F sang E là:*

A. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Câu 299. *Trong* $\mathbb{R}^3$, *cho hai cơ sở: cơ sở chính tắc E và* $F = \{f_1 = (0; 1; 1), f_2 = (1; 1; 1), f_3 = (0; 0; 1)\}$. *Ma trận chuyển cơ sở từ F sang E là:*

A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 300. *Trong* $\mathbb{R}^3$, *cho cơ sở* $F = \{f_1 = (1; 0; 0),\ f_2 = (1; 1; 0),\ f_3 = (1; 1; 1)\}$. *Tọa độ của véctơ x=(3,2,1) đối với cơ sở F là:*

A. $(1; 2; -1)$.
B. $(1; 1; 1)$.
C. $(1; 2; 3)$.
D. $(3; 2; 1)$.

Câu 301. *Trong* $\mathbb{R}^3$*, cho hai cơ sở, cơ sở chính tắc E và* $F = \{f_1 = (-1;1;1), f_2 = (1;-1;1), f_3 = (1;1;-1)\}$*. Ma trận chuyển cơ sở từ E sang F là:*

A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$.

Câu 302. *Trong* $\mathbb{R}^3$*, cho cơ sở* $F = \{f_1 = (-1;1;1), f_2 = (1;-1;1), f_3 = (1;1;-1)\}$*. Tọa độ của véctơ x=(7,7,2007) đối với cơ sở F là:*

A. $(1007;1007;7)$. **B**. $(1007;-1007;7)$.

C. $(107;107;7)$. **D**. $(0;-200;2007)$.

Câu 303. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *cho hai cơ sở* $F = \{f_1 = (-1;1), f_2 = (1;-2)\}$*,* $G = \{g_1 = (1;-2), g_2 = (-1;1)\}$*. Ma trận chuyển cơ sở từ F sang G là:*

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 304. *Trong* $\mathbb{R}^3$ *cho cơ sở* $F = \{f_1 = (-1;1;1), f_2 = (1;-1;1), f_3 = (1;1;-1)\}$*. Tọa độ của véctơ x=(2,4,8) đối với cơ sở F là:*

A. $(3;5;6)$. **B**. $(5;3;6)$. **C**. $(2;4;8)$. **D**. $(6;5;3)$.

Câu 305. *Trong* $\mathbb{R}^3$*, cho hệ véctơ* $x_1 = (1;0;-1), x_2 = (1;-1;0), x_3 = (1;1;1)$*. Bằng cách đặt* $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2,y_1\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}y_1,\ y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3,y_1\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}y_1 - \frac{\langle x_3,y_2\rangle}{\langle y_2,y_2\rangle}y_2$*(ký hiệu* $\langle,\rangle$*là tích vô hướng). Hệ véctơ đã cho có thể trực giao hóa thành hệ*

A. $y_1 = (1;0;-1), y_2 = \left(-\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right), y_3 = (1;1;1)$.

B. $y_1 = (1;0;-1), y_2 = \left(\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right), y_3 = (1;1;1)$.

C. $y_1 = (1;0;-1), y_2 = \left(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right), y_3 = (1;1;1)$.

D. *Cả ba* ***A., B., C.*** *đều sai.*

Câu 306. *Trong* $\mathbb{R}^3$*, cho hệ véctơ* $x_1 = (1;0;-1), x_2 = (1;-1;0), x_3 = (1;1;1)$*. Bằng cách đặt* $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2,y_1\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}y_1,\ y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3,y_1\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}y_1 - \frac{\langle x_3,y_2\rangle}{\langle y_2,y_2\rangle}y_2$*(ký hiệu* $\langle,\rangle$*là tích vô hướng). Hệ véctơ đã cho có thể trực giao hóa thành hệ*

A. $y_1 = (1;0;-1), y_2 = \left(-\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right), y_3 = (1;1;1)$.

B. $y_1 = (1;0;-1), y_2 = \left(\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right), y_3 = (1;1;1)$.

C. $y_1 = (1;0;-1), y_2 = \left(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right), y_3 = (1;1;1)$.

D. *Cả ba* ***A., B., C.*** *đều sai.*

Câu 307. *Trong* $\mathbb{R}^3$*, cho hệ véctơ* $x_1 = (1;0;-1), x_2 = (0;1;-1), x_3 = (1;1;1)$*. Bằng cách đặt* $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2,y_1\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}y_1,\ y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3,y_1\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}y_1 - \frac{\langle x_3,y_2\rangle}{\langle y_2,y_2\rangle}y_2$*(ký hiệu* $\langle,\rangle$*là tích* *vô hướng). Hệ véctơ đã cho có thể trực giao hóa thành hệ:*

A. $y_1 = (1; 0; -1), y_2 = \left(-\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{2}\right), y_3 = (1; 1; 1)$.

B. $y_1 = (1; 1; 1), y_2 = (-1; 0; 1), y_3 = \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-1}{2}\right)$.

C. $y_1 = (1; 0; -1), y_2 = \left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right), y_3 = (1; 1; 1)$.

D. *Cả ba **A., B., C.** đều sai.*

Câu 308. *Trong* $\mathbb{R}^3$*, cho hệ véctơ* $x_1 = (-1; 1; 0), x_2 = (1; 1; 1), x_3 = (-1; 0; 1)$*. Bằng cách đặt* $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1,\ y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle} y_2$*(ký hiệu* $\langle, \rangle$*là tích vô hướng). Hệ véctơ đã cho có thể trực giao hóa thành hệ*

A. $y_1 = (1; 1; 1), y_2 = (1; 0; -1), y_3 = (-1/2\ ; 1; -1/2\ )$.

B. $y_1 = (-1; 1; 0), y_2 = (1; 1; 1), y_3 = (-1/2\ ; -1/2\ ; 1)$.

C. $y_1 = (-1; 1; 0), y_2 = (1; 1; 1), y_3 = (1/2\ ; -1/2\ ; 1)$.

D. *Cả ba **A., B., C.** đều sai.*

Câu 309. *Trong* $\mathbb{R}^3$*, cho hệ véctơ* $x_1 = (1; 1; 1), x_2 = (1; 0; -1), x_3 = (0; 1; -1)$*. Bằng cách đặt* $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1,\ y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle} y_2$ *(ký hiệu* $\langle, \rangle$*là tích vô hướng). Hệ véctơ đã cho có thể trực giao hóa thành hệ*

A. $y_1 = (1; 1; 1), y_2 = (1; 0; -1), y_3 = \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-1}{2}\right)$.

B. $y_1 = (1; 1; 1), y_2 = (-1; 0; 1), y_3 = \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-1}{2}\right)$.

C. $y_1 = (1; 1; 1), y_2 = (-1; 0; 1), y_3 = \left(\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$.

D. $y_1 = (1; 1; 1), y_2 = (-1; 0; 1), y_3 = \left(\frac{-1}{2}; -1; \frac{-1}{2}\right)$.

Chương 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1 Ánh xạ tuyến tính

1.1 Khái niệm

Định nghĩa 4.1. *Cho X, Y là hai không gian vector thực. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn 2 điều kiện sau:*

i) $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in X;$

ii) $f(kx) = kf(x), \quad \forall x \in X, \ \forall k \in \mathbb{R}$

Thí dụ 4.1. *Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi:*

$$f(x_1; x_2) = (x_1 - x_2; 2x_1 + 3x_2).$$

là ánh xạ tuyến tính.

Thí dụ 4.2. *Ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi:*

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2 + x_3; 2x_1 + 3x_2).$$

là ánh xạ tuyến tính.

Thí dụ 4.3. *Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi:*

$$f(x; y) = (x - y; 2 + 3y)$$

không là ánh xạ tuyến tính.

Chú thích 26. *Giả sử $f : X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính. Ta có:*

i) $f(\theta_X) = f(\theta_X + \theta_X) \Rightarrow f(\theta_X) = f(\theta_X) + f(\theta_X)$
$\Rightarrow f(\theta_X) - f(\theta_X) = f(\theta_X) \Rightarrow f(\theta_X) = \theta_Y.$

ii) $f(kx+y) = f(kx) + f(y) = kf(x) + f(y)$.

Ngược lại, giả sử ta có

$$f(kx+y) = kf(x) + f(y), \forall x, y \in X,\ \forall k \in \mathbb{R}$$

cho $y = \theta_X$*, ta được:*

$$f(kx+\theta_X) = kf(x) + f(\theta_X) \Rightarrow f(kx) = kf(x).$$

cho $k = 1$*, ta được:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Như vậy $f : X \to Y$ *là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi*

$$f(kx+y) = kf(x) + f(y), \forall x, y \in X,\ \forall k \in R$$

1.2 Không gian ảnh và không gian nhân

Định nghĩa 4.2. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : X \to Y$ *. Ta định nghĩa:*

$$\ker f = \{x \in X | f(x) = \theta_Y\},$$
$$\mathrm{Im} f = \{f(x) | x \in X\}.$$

$\ker f, \mathrm{Im} f$ *lần lượt được gọi là không gian nhân và không gian ảnh của f.*

Mệnh đề 1. *Xét ánh xạ* $f : X \to Y$*. Khi đó*

i) $\ker f$ *là không gian con của X.*

ii) $\mathrm{Im} f$ *là không gian con của Y.*

Chú thích 27. *Ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *còn được gọi là là phép biến đổi tuyến tính (PBĐTT).*

1.3 Ma trận biểu diễn của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Giả sử* $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ *có cơ sở lần lượt là:*

$$A = \{u_1, u_2, ..., u_n\},\ B = \{v_1, v_2, ..., v_m\}.$$

Ma trận

$$[f]_A^B = \begin{pmatrix} [f(u_1)]_B & [f(u_2)]_B & \dots & [f(u_n)]_B \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở A, B

Chú thích 28. *Trường hợp đặc biệt: Cho PBĐTT* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *và cơ sở* $B = \{u_1, ..., u_n\}$ *Khi đó*

$$[f]_B = \begin{pmatrix} [f(u_1)]_B & [f(u_2)]_B & \dots & [f(u_n)]_B \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận biểu diễn của f theo cơ sở B.

Thí dụ 4.4. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ *định bởi*

$$f(x,y,z,t)=(3x+y-z;\ x-2y+t;\ y+3z-2t).$$

Tìm ma trận $[f]_{E_4}^{E_3}$.
Ta có:

$$[f]_{E_4}^{E_3}=\left(\begin{array}{cccc}[f(e_1)]_{E_3} & [f(e_2)]_{E_3} & [f(e_3)]_{E_3} & [f(e_4)]_{E_3}\end{array}\right).$$

$$f(e_1)=f(1;0;0;0)=(3;1;0)\,;f(e_2)=f(0;1;0;0)=(1;-2;1)\,;$$

$$f(e_3)=f(0;0;1;0)=(-1;0;3)\,;f(e_4)=f(0;0;0;1)=(0;1;-2).$$

$$\Rightarrow [f]_{E_4}^{E_3}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Thí dụ 4.5. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ *định bởi*

$$f(x,y,z)=(3x+y-z,\ x-2y,y+3z).$$

Tìm $[f]_{E_3}$.

$$[f]_{E_3}=\left(\begin{array}{ccc}[f(e_1)]_{E_3} & [f(e_2)]_{E_3} & [f(e_3)]_{E_3}\end{array}\right).$$

$$f(e_1)=f(1,0,0)=(3,1,0)\,;f(e_2)=f(0,1,0)=(1,-2,1)\,;$$

$$f(e_3)=f(0,0,1)=(-1,0,3)\,;$$

$$f(e_3)=f(0,0,1)=(-1,0,3)\,;$$

Thí dụ 4.6. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ *định bởi*

$$f(x,y)=(3x,\ x-2y,\ -5y).$$

Tìm $[f]_{E_2}^{E_3}$
Ta có:

$$[f]_{E_2}^{E_3}=\left(\begin{array}{cc}[f(e_1)]_{E_3} & [f(e_2)]_{E_3}\end{array}\right).$$

Với:

$$f(e_1)=f(1,0)=(3,1,0)\,;f(e_2)=f(0,1)=(0,-2,-5).$$

$$\Rightarrow [f]_{E_2}^{E_3}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\\ 0 & -5\end{pmatrix}.$$

Thí dụ 4.7. *Cho PBĐTT* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *định bởi*

$$f(x,y)=(2x-y,3y).$$

Tìm ma trận biểu diễn của f *theo cặp cơ sở chính tắc* E_2 *và cơ sở* $B = \{u_1 = (1,2), u_2 = (-1,3)\}$
Ta có:

$$[f]_{E_2}^{B} = \left(\begin{array}{cc} [f(e_1)]_B & [f(e_2)]_B \end{array} \right); f(e_1) = f(1,0) = (2,0); f(e_2) = f(0,1) = (-1,3).$$

Ta cần tìm $[f(e_1)]_B,\ [f(e_2)]_B$. *Đặt* $[f(e_1)]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(e_1) = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow (2,0) = a(1,2) + b(-1,3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow [f(e_1)]_B = \begin{pmatrix} 6/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}.$$

Đặt

$$[f(e_2)]_B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(e_2) = cu_1 + du_2 \Leftrightarrow (-1,3) = c(1,2) + d(-1,3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c - d = -1 \\ 2c + 3d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow [f(e_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy $[f]_{E_2}^{B} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$.

Thí dụ 4.8. *Cho PBĐTT* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Biết rằng:* $f(1,2) = (-4,3),\ f(3,4) = (-6,7)$. *Hãy tìm* $[f]_{E_2}$
Gọi biểu thức của f *là:* $f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1,2) = (a + 2b, c + 2d) \\ f(3,4) = (3a + 4b, 3c + 4d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 2b, c + 2d) = (-4,3) \\ (3a + 4b, 3c + 4d) = (-6,7) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = -4 \\ 3a + 4b = -6 \\ c + 2d = 3 \\ 3c + 4d = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \\ d = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x,y) = (2x - 3y, x + y)$.

$$f(e_1) = f(1,0) = (2,1); f(e_2) = f(0,1) = (-3,1).$$

$$\Rightarrow [f]_{E_2} = \left(\begin{array}{cc} [f(e_1)]_{E_2} & [f(e_2)]_{E_2} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Định lý 4.1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Giả sử $\mathbb{R}^n$ có hai cơ sở là B_1, B_2 giả sử $\mathbb{R}^m$ có hai cơ sở $B_1^{/}, B_2^{/}$. Đặt $P = P_{B_1 \to B_2},\ Q = P_{B_1^{/} \to B_2^{/}}$. Khi đó, ta có:

$$[f]_{B_1^{/}}^{B_2^{/}} = Q^{-1} [f]_{B_1}^{B_2} P.$$

Định lý 4.2. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Giả sử $\mathbb{R}^n$ có hai cơ sở là B_1, B_2. Đặt $P = P_{B_1 \to B_2}$. Khi đó, ta có

$$[f]_{B_2} = P^{-1}[f]_{B_1}P.$$

Thí dụ 4.9. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - 2y)$. Tìm $[f]_B$ biết $B = \{u_1 = (2, 1), u_2 = (1, -1)\}$. Đặt $P = P_{E_2 \to B} = \begin{pmatrix} [u_1]_{E_2} & [u_2]_{E_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$[f]_{E_2} = \begin{pmatrix} [f(e_1)]_{E_2} & [f(e_2)]_{E_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} [f]_B = P^{-1}[f]_{E_2}P &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Thí dụ 4.10. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:
$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + y - z)$.
Tìm $[f]_F$ biết $F = \{(2, 1, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$.

$$P = P_{E_3 \to F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$[f]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$[f]_F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Thí dụ 4.11. Cho AXTT $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z).$$

Tìm ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}; \quad B' = \{(2, 1), (1, 1)\}.$$

Ta có :

$$P = P_{E_3 \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; Q = P_{E_2 \to B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; [f]_{E_3}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$[f]_B^{B'} = Q^{-1} [f]_{E_3}^{E_2} P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Thuật toán tìm ma trận biểu diễn của AXTT: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *. Giả sử* $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ *có cơ sở lần lượt là:*

$$A = \{u_1, u_2, ..., u_n\}, \; B = \{v_1, v_2, ..., v_m\}.$$

i) Tìm các ma trận

$$S = \begin{pmatrix} [v_1]_{E_m} & [v_2]_{E_m} & ... & [v_m]_{E_m} \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} [f(u_1)]_{E_m} & [f(u_2)]_{E_m} & ... & [f(u_n)]_{E_m} \end{pmatrix}.$$

ii) Dùng các PBĐSC trên dòng đưa ma trận $(S|\, Q)$ *về ma trận* $\left(I|\, [f]_A^B\right)$.

Thí dụ 4.12. Cho PBĐTT $f(x, y) = (x + y, x - 2y)$.
Dùng thuật toán, tìm $[f]_B$ với $B = \{(2, 1), (1, -1)\}$.
Ta có :$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

$$f(2, 1) = (3, 0); f(1, -1) = (0, 3) \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(S|\, Q) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 \to \frac{1}{3} d_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \to d_1 + d_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Vậy $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Thí dụ 4.13. Cho AXTT $f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z)$. Dùng thuật toán, tìm ma trận biểu diễn của f trong cặp cơ sở:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}, B' = \{(2, 1), (1, 1)\}.$$

Ta có:
$S = \begin{pmatrix} [v_1]_{E_2} & [v_2]_{E_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$
$f(1,1,0) = (2,0)\,; f(0,1,1) = (0,0)\,; f(1,0,1) = (0,2)\,. \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

$$(S|\,Q) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 - 2d_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to -d_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \to d_1 - d_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Vậy:
$[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Thí dụ 4.14. Cho AXTT $f(x,y) = (x+y, y-x, x)$ và cơ sở

$$A = \{(1,0,0)\,, (1,1,0)\,, (0,1,1)\}\,,\ B = \{(1,-2)\,, (3,4)\}\,.$$

Dùng thuật toán, tìm ma trận $[f]_B^A$
Ta có :

$$S = \begin{pmatrix} [v_1]_{E_3} & [v_2]_{E_3} & [v_3]_{E_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$f(1,-2) = (-1,-3,1)\,; f(3,4) = (7,1,3) \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \to d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1 \to d_1 + d_3]{d_2 \to d_2 - d_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Vậy :$[f]_B^A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Định lý 4.3. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và vector $u \in \mathbb{R}^n$. Giả sử B là cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, ta có

$$[f(u)]_B = [f]_B . [u]_B$$

Thí dụ 4.15. *Cho* PBĐTT $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận

$$[f]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm biểu thức của f.
Với mọi $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta cần tìm $f(u)$.
Ta có:
$[f(u)]_{E_3} = [f]_{E_3}[u]_{E_3}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 7y - 2z \\ 3y + 3z \\ 2x + 8y - z \end{pmatrix}.$
Vậy $f(u) = (x + 7y - 2z, 3y + 3z, 2x + 8y - z)$.

Chú thích 29. [1]*E_n là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}_n$. Khi đó ta có :*

$$y = f = Ax$$

Từ đó nếu f có ánh xạ ngược thì biểu thức ánh xạ ngược là: $x = A^{-1}y$

Thí dụ 4.16. *Tìm ánh xạ ngược(nếu có) của ánh xạ:*

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3; x_1 - x_2 + x_3; x_1 + x_2 - x_3) \end{aligned}$$

....
....
....
....
....
....
....
....

Chú thích 30. *Cho*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto y = Ax \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto By \end{aligned}$$

. Khi đó:

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) = B\,f(x) = B\,Ax \end{aligned}$$

Thí dụ 4.17.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (3x_1; x_1 - x_2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto (y_1 - y_2; y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Tìm $g \circ f(x); f \circ g(x)$(nếu có).
....

[1]Sinh viên xem [2]

....
....
....
....
....
....
....

1.4 Hạng của ánh xạ tuyến tính

Hạng của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *là số chiều của không gian ảnh. Ký hiệu là* $r(f)$.
Như vậy $r(f) = \dim(\mathrm{Im} f)$.

Định lý 4.4. *Hạng của ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *bằng với hạng ma trận biểu diễn của* f *theo một cặp cơ sở nào đó.*

Thí dụ 4.18. Cho AXTT $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi $f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z)$.
Tìm hạng của f.
Ta có:

$$[f]_{E_3}^{E_2} = \left([f(e_1)]_{E_2} \quad [f(e_2)]_{E_2} \quad [f(e_3)]_{E_2} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy $r(f) = 2$.

2 Trị riêng-vector riêng

2.1 Đa thức đặc trưng

Định nghĩa 4.3. Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Đa thức bậc n của λ:

$$P_A(\lambda) = |\, A - \lambda I_n \,|$$

được gọi là đa thức đặc trưng của A và phương trình $P_n(\lambda) = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng.

Định nghĩa 4.4. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Đa thức bậc

$$P_f(\lambda) = |\, A - \lambda I_n|$$

được gọi là đa thức đặc trưng của f (A là ma trận biểu diễn của f theo một cơ sở nào đó) và phương trình $P_f(\lambda) = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng.

Thí dụ 4.19. *Tìm đa thức đặc trưng của* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ta có:

$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$

Thí dụ 4.20. *Viết phương trình đặc trưng của PBĐTT*

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x).$$

Ta có:

$A = [f]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$P_f(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda.$

Phương trình đặc trưng $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda = 0.$

2.2 Trị riêng ,vector riêng

Định nghĩa 4.5. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

i) Số thực $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là trị riêng của f nếu

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq \theta : f(x) = \lambda x \tag{4.1}$$

ii) Vector x thỏa (4.1) được gọi là vector riêng của f ứng với trị riêng λ

Thí dụ 4.21. *Cho phép BĐTT* $f(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, x_1 + x_2)$.

Xét $\lambda = 3$ *và vector* $x = (2, 1)$ *, ta có:*

$f(x) = f(2, 1) = (6, 3) = 3(2, 1) = \lambda x.$

Vậy $x = (2, 1)$ *là vector riêng ứng với trị riêng* $\lambda = 3$

Định nghĩa 4.6. Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$

i) Số thực $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là trị riêng của A nếu

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq \theta : A[x] = \lambda[x] \tag{4.2}$$

ii) Vector x thỏa (4.2) được gọi là vector riêng của A ứng với trị riêng λ

Định lý 4.5. *Cho PBĐTT* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

i) $\lambda \in \mathbb{R}$ *là trị riêng của* f *nếu và chỉ nếu* λ *là trị riêng của ma trận biểu diễn của* f *theo một cơ sở nào đó.*

ii) $x \neq \theta$ là vector riêng của f nếu và chỉ nếu x là vector riêng của ma trận biểu diễn của f theo một cơ sở nào đó.

Chú thích 31.

$$\begin{aligned} A[x] = \lambda[x] &\Leftrightarrow A[x] - \lambda[x] = [\theta] \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)[x] = [\theta]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Để $x \neq 0$ là vector riêng của A thì (4.3) phải có nghiệm không tầm thường.
Theo quy tắc Cramer, ta suy ra:$|A - \lambda I_n| = 0$
Vậy λ là nghiệm của phương trình đặc trưng.

Thuật toán tìm trị riêng và vector riêng

i) Giải phương trình đặc trưng $|A - \lambda I_n| = 0$ để tìm các trị riêng.

ii) Giải hệ phương trình $(A - \lambda I_n)[x] = [\theta]$, nghiệm không tầm thường là vector riêng.

Thí dụ 4.22. *Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận biểu diễn là $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*
Tìm trị riêng và vector riêng của f.
Ta có:

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 3. \end{array} \right.$$

Vậy f có các trị riêng $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$.
Với $\lambda_1 = 2$ giải hệ $(A - 2I_2)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

Đặt $x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \alpha$. Vector riêng $x = (x_1; x_2) = (\alpha; \alpha)$, $\alpha \neq 0$.
Với $\lambda_2 =$ giải hệ $(A - 3I_2)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = 2x_2.$$

Đặt $x_2 = \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = 2\beta$.
Vậy vector riêng $x = (x_1; x_2) = (2\beta; \beta)$, $\beta \neq 0$.

Thí dụ 4.23. *Tìm trị riêng và vector riêng của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 1\right).$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Vậy A có các trị riêng là $\lambda = -1,\ \lambda = 1$.

Với $\lambda = -1$ *giải hệ* $(A + I_3)[x] = [\theta] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nghiệm của hệ: $\begin{cases} x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -\alpha. \end{cases}$

Vậy vector riêng $x = (-\alpha; 0; \alpha),\ \alpha \neq 0$.

Với $\lambda = 1$ *giải hệ* $(A - I_3)[x] = [\theta] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy nghiệm của hệ $\begin{cases} x_2 = \beta \in \mathbb{R} \\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \\ x_1 = \gamma. \end{cases}$

Vậy vector riêng $x = (\gamma; \beta; \gamma),\ \ \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

2.3 Không gian riêng

Định nghĩa 4.7. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và λ là trị riêng của f.
Tập hợp $E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = \lambda x\}$ được gọi là không gian riêng của f ứng với trị riêng λ.

Định nghĩa 4.8. Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ và λ là trị riêng của A.
Tập hợp $E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n | A[x] = \lambda[x]\}$ được gọi là không gian riêng của A ứng với trị riêng λ.

Chú thích 32. *Các nghiệm cơ bản ĐLTT của hệ* $(A - \lambda I_n)[x] = [\theta]$ *tạo thành cơ sở cho không gian* $E(\lambda)$

Thí dụ 4.24. *Cho ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tìm cơ sở, số chiều của các không gian con riêng ứng với các giá trị riêng của A.

$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$\underline{\underline{d_1 \to d_1 + d_2}} \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{c_2 \to c_2 - c_1}} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 (1-\lambda);$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \lambda = 1. \end{array} \right.$

Với $\lambda = -2$ *, ta xét hệ* $(A + 2I_3)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{d_1 \to \frac{1}{3} d_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 4d_1]{d_2 \to d_2 + 4d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Chọn $x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = -\alpha,\ x_3 = 0.$
Nghiệm của hệ $x = (-\alpha, \alpha, 0) = \alpha(-1, 1, 0).$
Vậy $E(-2)$ *có cơ sở* $\{u_1 = (-1, 1, 0)\}$, $\dim E(-2) = 1.$
Với $\lambda = 1$ *, ta xét hệ* $(A - I_3)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 + 4d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Chọn $x_3 = \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = -\beta,\ x_1 = \beta.$
Nghiệm của hệ $x = (\beta, -\beta, \beta) = \beta(1, -1, 1).$
Vậy $E(1)$ *có cơ sở* $\{u_2 = (1, -1, 1)\}$, $\dim E(1) = 1.$

Thí dụ 4.25. *Cho ma trận*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{d_1 \to d_1 - d_2}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{c_2 \to c_2 + c_1}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2.$$

$$P_B(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 2. \end{array} \right.$$

Với $\lambda = 1$, *ta xét hệ* $(B - I_3)[x] = [\theta]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Chọn $x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \frac{\alpha}{2},\ x_2 = 0$. *Nghiệm hệ* $x = \left(\frac{\alpha}{2}, 0, \alpha\right) = \frac{\alpha}{2}(1,0,2)$. $E(1)$*có cơ sở* $\{u_1 = (1,0,2)\}$, $\dim E(1) = 1$.
Với $\lambda_2 = 2$, *ta xét hệ* $(B - 2I_3)[x] = [\theta]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Chọn $x_3 = \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{2},\ x_1 = \frac{\beta}{2}$.
Nghiệm của hệ $x = \left(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}, \beta\right) = \frac{\beta}{2}(1,1,2)$.
$E(2)$ *có cơ sở* $\{u_2 = (1,1,2)\}$, $\dim E(2) = 1$.

2.4 Định lý Cayley-Hamilton

Định lý 4.6. *Cho ma trận* A *có đa thức đặc trưng là* $P_A(\lambda)$. *Khi đó, ta có*

$$P_A(A) = (0_{ij})_n.$$

Thí dụ 4.26. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính* $\det B$ *với* $B = A^7 - 10A^6 + 14A^5 + 4A^4 + 8I_3$.
Ta có:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 8\lambda - 2\right)$$

$= 2\lambda^2 - 16\lambda - 4 - \lambda^3 + 8\lambda^2 + 2\lambda = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 14\lambda - 4$
$\Rightarrow P_A(A) = -A^3 + 10A^2 - 14A - 4I_3$
Mà theo định lý Cayley – Hamilton thì $P_A(A) = 0_3$.
Do vậy $-A^3 + 10A^2 - 14A - 4I_3 = 0_3$.
$\Rightarrow A^3 - 10A^2 + 14A + 4I_3 = 0_3 \Rightarrow A^4\left(A^3 - 10A^2 + 14A + 4I_3\right) = 0_3$
$\Rightarrow A^7 - 10A^6 + 14A^5 + 4A^4 = 0_3 \Rightarrow A^7 - 10A^6 + 14A^5 + 4A^4 + 8I_3 = 8I_3$
$\Rightarrow B = 8I_3 \Rightarrow \det B = \det(8I_3) = 8^3$.

3 Chéo hóa ma trận

Định nghĩa 4.9. Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói A chéo hóa được nếu tồn tại một ma trận P khả nghịch sao cho:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n).$$

Thí dụ 4.27. *Ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *là chéo hóa được vì có ma trận* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *khả nghịch thỏa*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1 Điều kiện cần và đủ cho sự chéo hóa

Định lý 4.7. Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ma trận chéo hóa được nếu và chỉ nếu 2 điều kiện sau được thỏa:

i) Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ tách được, nghĩa là

$$P_A(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}...(\lambda - \lambda_k)^{r_k};$$

ii) Với mọi $j = \overline{1, k}$, ta có $\dim E(\lambda_j) = r_j$.

Thí dụ 4.28. *Ma trận sau có chéo hóa được hay không?*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 11.$$

Do $P_A(\lambda)$ không tách được , nên A không chéo hóa được.

Thí dụ 4.29. *Ma trận sau có chéo hóa được hay không?*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có: $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{d_1 \to d_1 - d_2}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{c_2 \to c_2 + c_2}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2.$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 2. \end{array}\right.$

Với $\lambda = 2$ *, ta xét hệ* $(A - 2I_3)[x] = [\theta]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to d_2 - 2d_1]{d_3 \to d_3 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Chọn $x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = \frac{\alpha}{2},\ x_1 = \frac{\alpha}{2}$.
Nghiệm của hệ: $x = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha\right) = \frac{\alpha}{2}(1,1,2)$ *. Ta có* $E(2)$ *có cơ sở* $\{u = (1,1,2)\}$ *,* $\dim E(2) = 1$.
Ta thấy $\dim E(2) < 2$ *nên A không chéo hóa được.*

3.2 Thuật toán chéo hóa ma trận vuông

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Để chéo hóa A , ta tiến hành các bước sau:

i) Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$. Nếu $P_A(\lambda)$ không tách được thì A không chéo hóa. Ngược lại, nếu $P_A(\lambda)$ tách được thì ta chuyển sang bước 2.

ii) Tìm các cơ sở B_j của các không gian riêng $E(\lambda_j)$. Giả sử $\dim E(\lambda_j) = r_j,\ \forall j = \overline{1,k}$.

iii) Đặt $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$. Đặt $P = P_{E \to B}$ Khi đó, P khả nghịch và

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k).$$

(mỗi λ_j xuất hiện r_j lần).

Thí dụ 4.30. *Chéo hóa ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)\,; P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Với $\lambda_1 = 1$*, ta xét hệ* $(A - I_2)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 6x_1 - 2x_2 = 0.$$

Chọn $x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \frac{\alpha}{3}$*. Ta có nghiệm* $x = \left(\frac{\alpha}{3}, \alpha\right) = \frac{\alpha}{3}(1,3)$.
$E(1)$ *có cơ sở* $B_1 = \{u_1 = (1,3)\}$, $\dim E(1) = 1$.
Với $\lambda_1 = -1$*, ta xét hệ* $(A + I_2)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0.$$

Chọn $x_2 = \beta \in \mathbb{R}$*. Ta có nghiệm* $x = (0,\beta) = \beta(0,1)$.
$E(-1)$*có cơ sở* $B_2 = \{u_2 = (0,1)\}$, $\dim E(-1) = 1$.
Đặt $B = B_1 \cup B_2 = \{u_1 = (1,3), u_2 = (0,1)\}$.
Đặt $P = P_{E\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$*. Khi đó* P *khả nghịch và :*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Thí dụ 4.31. *Chéo hóa ma trận* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 \\ -6 & -4-\lambda & 3 \\ -6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{d_3 \to d_3 - d_2}} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 \\ -6 & -4-\lambda & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{c_2 \to c_2 + c_3}} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = -(\lambda-1)(2-\lambda)^2;$$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 2. \end{array}\right.$
Với $\lambda_1 = 1$ *, ta xét hệ* $(A - I_3)[x] = [\theta]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & -5 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 + 2d_1]{d_2 \to d_2 + 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Chọn $x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = \alpha,\ x_1 = -\frac{\alpha}{3}$. *Ta được nghiệm* $x = \left(-\frac{\alpha}{3}, \alpha, \alpha\right) = \frac{\alpha}{3}(-1, 3, 3)$.
$E(1)$ *có cơ sở* $B_1 = \{u_1 = (-1, 3, 3)\}$, $\dim E(1) = 1$.
Với $\lambda_1 = 2$, *ta xét hệ* $(A - 2I_3)[x] = [\theta]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 + 3d_1]{d_2 \to d_2 + 3d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Chọn $x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = -\beta + \frac{\gamma}{2}$. *Ta được nghiệm* $x = \left(-\beta + \frac{\gamma}{2}, \beta, \gamma\right) = \beta(-1, 1, 0) + \frac{\gamma}{2}(1, 0, 2)$.
$E(-2)$*có cơ sở* $B_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 2)\}, \dim E(-2) = 2$.
Đặt $B = B_1 \cup B_2 = \{u_1 = (-1, 3, 3), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 2)\}$.
Đặt $P = P_{E \to B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Khi đó P *khả nghịch và* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề 2. *Cho ma trận* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Nếu* A *có* n *trị riêng phân biệt thì* A *chéo hóa được.*

Thí dụ 4.32. *Trong các ma trận sau, ma trận nào chéo hóa được:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hướng dẫn: A và C.
....
....
....
....

3.3 Tính lũy thừa bậc cao của ma trận

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Giả sử* A *chéo hóa được. Khi đó, có ma trận* P *khả nghịch sao cho*

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \Rightarrow A = P.\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n).P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^k = P[\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)]^k P^{-1} \Rightarrow A^k = P.\operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k\right).P^{-1}$$

Thí dụ 4.33. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. *Tính* A^{2017}

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 8 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda)$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = -1 \end{array} \right.$$

Với $\lambda = 3$, *ta xét hệ* $(A - 3I_2)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 8x_1 - 4x_2 = 0.$$

Chọn $x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \frac{\alpha}{2}$. *Ta được nghiệm* $x = \left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right) = \frac{\alpha}{2}(1,2)$.
$E(3)$ *có cơ sở* $B_1 = \{u_1 = (1,2)\}$, $\dim E(3) = 1$.
Với $\lambda = -1$, *ta xét hệ* $(A + I_2)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0.$$

Chọn $x_2 = \alpha \in \mathbb{R}$. *Ta được nghiệm* $x = (0, \alpha) = \alpha(0,1)$.
$E(-1)$ *có cơ sở* $B_2 = \{u_2 = (0,1)\}$, $\dim E(-1) = 1$.
Đặt $B = B_1 \cup B_2 = \{u_1 = (1,2), u_2 = (0,1)\}$.
Đặt $P = P_{E\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Ta có P *khả nghịch và*
$P = P_{E\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\Rightarrow A^{2017} = \left[P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right]^{2017} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{2017} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3^{2017} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{2017} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{2017} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{2017} & 0 \\ 2.3^{2017} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{2017} & 0 \\ 2.3^{2017} - 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4 Bài tập

4.1. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{f_1 = (1;1),\ f_2 = (1;0)\}$
là: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Tìm biểu thức của* f.

4.2. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *định bởi* $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 + 4x_2)$. *Tìm ma trận của ánh xạ ngược* $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *đối với cơ sở chính tắc.*

4.3. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *định bởi* $f(x, y) = (4x, 4x - y)$. *Tìm ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{f_1 = (1;1),\ f_2 = (-1;1)\}$.

4.4. *Cho hai ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *định bởi*

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 + x_3; x_1 + x_2 - x_3; x_1 - x_2 - x_3)$$

và $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *định bởi*

$$g(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2 - x_3; x_1 + x_2 - x_3; x_1 - x_2 + x_3)$$

. Tìm công thức ánh xạ hợp $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

4.5. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, định bởi* $f(x, y) = (x + y, x - y)$*. Tìm ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{(1; 1),\ (1; 0)\}$.

4.6. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*. Ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{(0; 1),\ (1; 0)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$*. Tìm biểu thức của* f *.*

4.7. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, định bởi* $f(x, y) = (x - y, x - y)$*. Tìm ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{(1; 1),\ (1; 2)\}$.

4.8. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{(0; -1),\ (1; 0)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$*. Tìm biểu thức của* f *.*

4.9. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{f_1 = (1; 1),\ f_2 = (1; -1)\}$ *là:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Tìm biểu thức của* f *.*

4.10. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, ma trận của* f *đối với cơ sở* $E = \{\ (1; 0), (0; 1)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$*. Tìm biểu thức của ánh xạ ngược* $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

4.11. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x, y, z) = (x - y, y - z, -x + z)$*. Tìm ma trận của* f *đối với cơ sở* $E = \{(1; 0; 0),\ (0; 1; 0),\ (0; 0; 1)\}$.

4.12. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x, y, z) = (x - y, y - z, -x + z)$*. Tìm ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{(1; 1; 0),\ (0; 1; 1),\ (1; 0; 1)\}$.

4.13. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$*. Tìm ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{(1; 1; 0),\ (0; 1; 1),\ (1; 0; 1)\}$.

4.14. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + y + 3z)$*. Tìm ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{(1; 1; 0),\ (0; 1; 1),\ (1; 0; 1)\}$.

4.15. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, biết ma trận của* f *đối với cơ sở* $F = \{(1; 1; 0),\ (0; 1; 1),\ (1; 0; 1)\}$ *là:* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) Tìm biểu thức của f .

ii) Tìm biểu thức của f^{-1} (nếu có).

4.16. *Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, biết ma trận của f đối với cơ sở $F=\{(1;1;-1),\ (-1;1;1),(1;-1;1)\}$ là:* $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&4\\-1&3&1\end{pmatrix}$

i) Tìm biểu thức của f .

ii) Tìm biểu thức của f^{-1} (nếu có).

4.17. *Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$*

i) $f(x_1,x_2)=(x_1+3x_2+1,\ 2x_1+4x_2)$

ii) $f(x_1,x_2)=(x_1x_2,2x_1+4x_2)$

iii) $f(x_1,x_2)=(6x_1-2x_2,2x_1-x_2)$

iv) $f(x_1,x_2)=\left({x_1}^2,x_2\right)$

4.18. *Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$*

i) $f(x_1,x_2)=(x_1+3x_2+1,\ 2x_1+4x_2)$

ii) $f(x_1,x_2)=(x_1x_2,2x_1+4x_2)$

iii) $f(x_1,x_2)=\left(6x_1-2x_2,2{x_1}^3-x_2\right)$ *d)* $f(x_1,x_2)=(2x_1,x_1-x_2)$

4.19. *Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$*

i) $f(x_1,x_2)=(x_1+3x_2+1,\ 2x_1+4x_2)$

ii) $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,2x_1+4x_2)$

iii) $f(x_1,x_2)=\left(6x_1-2x_2,2{x_1}^3-x_2\right)$

iv) $f(x_1,x_2)=(2x_1+4,x_1-x_2)$

4.20. *Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, định bởi $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,x_1-x_2+x_3,x_1+x_2-x_3)$. Tập hợp V tất cả (x_1,x_2,x_3)thỏa $f(x_1,x_2,x_3)=0$.*

4.21. *Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, định bởi $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,x_1+x_2+x_3,x_1-x_2-x_3)$. Tập hợp V tất cả (x_1,x_2,x_3)thỏa $f(x_1,x_2,x_3)=0$.*

4.22. *Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, định bởi $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3,7x_1+8x_2+9x_3)$. Tập hợp V tất cả (x_1,x_2,x_3)thỏa $f(x_1,x_2,x_3)=0$.*

4.23. *Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, định bởi $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,x_1-x_2+x_3,x_1+x_2-x_3)$. Tìm ma trận của ánh xạ ngược $f^{-1}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ đối với cơ sở chính tắc.*

4.24. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, x+y-z)$*. Tìm biểu thức của ánh xạ ngược* $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*.*

4.25. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$*. Tìm biểu thức của ánh xạ ngược* $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*.*

4.26. *Xác định m để ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x,y,z) = (mx+y+z, x+my+z, x+y+mz)$ *có ánh xạ ngược* $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*.*

4.27. *Xác định m để ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x,y,z) = (mx+y+z, x+my+z, x+y+mz)$*không có ánh xạ ngược* $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*.*

4.28. *Cho ánh xạ* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+z, x+y+3z)$*.*

i) *Chứng minh f là phép biến đổi tuyến tính.*

ii) *Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^3$*.*

iii) *Tìm ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1;1;-1),\ (-1;1;1),\ (1;-1;1)\}$*(giải bằng hai phương pháp).*

4.29. *Cho f là ánh xạ tuyến tính có ma trận theo cặp cơ sở chính tắc xác định như dưới đây. Hãy tìm một cơ sở và xác định số chiều của Im(f) và Ker (f):*

i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ *ii)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *iii)* $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4.30. *Tìm da thức đặc trưng của các ma trận sau:*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4.31. *Tìm các trị riêng của các ma trận sau:*

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4.32. *Chéo hóa các ma trận sau:*

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.33. *Tính* A^{2017} *với*

i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$*; ii)* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 310. *Ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính từ* $\mathbb{R}^3$ *vào* $\mathbb{R}^2$ *?*
A. $f(x, y, z) = (2x - 3xy + 4z; x - 3y + z)$.
B. $f(x, y, z) = (2x - 3y + 4z;\ x - 3xy + z)$.
C. $f(x, y, z) = (2x - y + z + 1,\ x - 3y + z)$.
D. $f(x, y, z) = (2x - 3y + 4z;\ x - 3y + z)$.

Câu 311. *Ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính từ* $\mathbb{R}^3$ *vào* $\mathbb{R}^3$ *?*
A. $f(x, y, z) = (x - y + 4z, x - 3y + z, xy)$.
B. $f(x, y, z) = \left(2x^2 - 3y + 4z,\ x - 3y^2 + x,\ 0\right)$.
C. $f(x, y, z) = (2x - y + z,\ x - 3y + z,\ 0)$.
D. $f(x, y, z) = (2x - 3y + 4z,\ x - 3y + z,\ 1)$.

Câu 312. *Ánh xạ* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *xác định bởi* $f(x, y, z) = (2x - 3y + Az, x - 3Bxy,\ x + z)$, $(A,\ B \in \mathbb{R})$ *là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi:*

A. *A=B=0.*
B. *A tùy ý, B=0.*
C. *B tùy ý, A=0.*
D. *A ,B tùy ý.*

Câu 313. *Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính từ* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
A. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2 + 1,\ 2x_1 + 4x_2)$.
B. $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, 2x_1 + 4x_2)$.
C. $f(x_1, x_2) = (6x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2)$.
D. $f(x_1, x_2) = \left({x_1}^2, x_2\right)$.

Câu 314. *Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính từ* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
A. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2 + 1,\ 2x_1 + 4x_2)$.
B. $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, 2x_1 + 4x_2)$.
C. $f(x_1, x_2) = \left(6x_1 - 2x_2, 2{x_1}^3 - x_2\right)$.
D. $f(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 - x_2)$.

Câu 315. *Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính từ* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
A. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2 + 1,\ 2x_1 + 4x_2)$.
B. $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 4x_2)$.
C. $f(x_1, x_2) = \left(6x_1 - 2x_2, 2{x_1}^3 - x_2\right)$.
D. $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4, x_1 - x_2)$.

Câu 316. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *định bởi* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$. *Tập hợp V tất cả* (x_1, x_2, x_3) *thỏa* $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ *là:*
A. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/\ x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$.
B. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/x_1 = 3x_3 + 1,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in R\}$.
C. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/x_1 = 3x_3 + 1,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in R\}$.
D. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/x_1 = 3x_3 + 1,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in R\}$.

Câu 317. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *định bởi* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_3)$. *Tập hợp V tất cả* (x_1, x_2, x_3) *thỏa* $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ *là:*
A. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/\ x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$.
B. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/\ x_1 = 0,\ x_2 = -x_3,\ x_3 \in R\}$.
C. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/x_1 = 3x_3,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in R\}$.
D. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/x_1 = 3x_3 + 1,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in R\}$.

Câu 318. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3, 7x_1+8x_2+9x_3)$*. Tập hợp V tất cả* (x_1, x_2, x_3) *thỏa* $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ *là:*
A. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/\ x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$.
B. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/\ x_1 = 0,\ x_2 = -x_3,\ x_3 \in R\}$.
C. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/x_1 = 3x_3,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in R\}$.
D. $V = \{(x_1, x_2,\ x_3)/x_1 = x_3,\ x_2 = -2x_3,\ x_3 \in R\}$.

Câu 319. *Ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *định bởi* $f\,(x, y, z) = (x - y + 4z;\ x - 3y + z;\ x)$ *có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^3$ *là:*
A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
C. *Các kết quả trên đều đúng.*
D. *Các kết quả trên đều sai.*

Câu 320. *Ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *định bởi* $f\,(x, y) = (x + 2y, x + 3y)$ *có ma trận biểu diễn theo cặp cơ sở chính tắc* B_0 *của* $\mathbb{R}^2$ *và cơ sở* $B = \{(0, 1)\,,\ (-1, 0)\}$ *là:*
A. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Câu 321. *Ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *định bởi* $f\,(x, y) = (x + 2y, x + 3y)$ *có ma trận biểu diễn theo cặp cơ sở* $B = \{(0, 1)\,,\ (-1, 0)\}$ *và cơ sở chính tắc* B_0 *của* $\mathbb{R}^2$ *là:*
A. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Câu 322. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, định bởi* $f(x, y) = (x, 0)$*. Ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1; 2),\ (1; 3)\}$ *là:*
A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Câu 323. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, định bởi*$f(x, y) = (0, x)$*. Ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1; 1),\ (1; 0)\}$ *là:*
A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T$.

Câu 324. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, định bởi* $f(x, y) = (x - y, x)$*. Ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1; 2),\ (1; 3)\}$ *là:*

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T$.
C. $\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

Câu 325. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, định bởi* $f(x, y) = (x, x + y)$*. Ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1; 3), (1; 2)\}$ *là:*

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Câu 326. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x, y, z) = (x-y, y-z, -x+z)$*. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc* $E = \{(1; 0; 0),\ (0; 1; 0),\ (0; 0; 1)\}$.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 327. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x, y, z) = (x - y, y - z, -x + z)$*. Tìm ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1; 1; 0),\ (0; 1; 1),\ (1; 0; 1)\}$.

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 328. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, định bởi* $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$*. Tìm ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1; 1; 0),\ (0; 1; 1),\ (1; 0; 1)\}$.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
B. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 329. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *có ma trận biểu diễn của f đối với cơ sở chính tắc* B_0 *là* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$*. Biểu thức của f là :*

A. $f\,(x, y) = (x + 2y,\ -x - 3y)$.
B. $f\,(x, y) = (x - y,\ 2x - 3y)$.

C. $f(x, y) = (x + 3y,\ x - 2y)$.
D. *Các kết quả trên đều sai.*

Câu 330. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(0;1),\ (1;0)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Biểu thức của f là:*

A. $f(x, y) = (2x + 2y, x + y)$.
B. $f(x, y) = (2x - 2y, x - y)$.
C. $f(x, y) = (2x + 2y, x - y)$.
D. $f(x, y) = (-2x - 2y, x - y)$.

Câu 331. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(2;1),\ (1;1)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Biểu thức của f là:*

A. $f(x, y) = (5y, 3y)$.
B. $f(x, y) = (5x, 3y)$.
C. $f(x, y) = (3y, 5x)$.
D. $f(x, y) = (4y, 3y)$.

Câu 332. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1;2),\ (3;4)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Biểu thức của f là :*

A. $f(x, y) = (x, y)$.
B. $f(x, y) = (y, x)$.
C. $f(x, y) = (x, x)$.
D. $f(x, y) = (y, y)$.

Câu 333. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1;1),\ (-1;-2)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Biểu thức của f là :*

A. $f(x, y) = (-6x + 4y, -16x + 11y)$.
B. $f(x, y) = (-6x + 4y, 16x + 11y)$.
C. $f(x, y) = (6x + 4y, -16x + 11y)$.
D. $f(x, y) = (6x + 4y, 16x + 11y)$.

Câu 334. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *ma trận của f đối với cơ sở* $E = \{(1;0),\ (0;1)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Biểu thức của f là :*

A. $f(x, y) = (x + 4y, 3x + 2y)$.
B. $f(x, y) = (x + 3y, 2x + 4y)$.
C. $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y)$.
D. $f(x, y) = (x - 2y, 3x - 4y)$.

Câu 335. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *có ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở* $B = \{(1, 1)\,,\ (0, 1)\}$ *và cơ sở chính tắc* B_0 *là* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Biểu thức của f là :*

A. $f(x, y) = (2x + y,\ 0)$.
B. $f(x, y) = (y,\ 0)$.
C. $f(x, y) = (x + y,\ x + y)$.
D. $f(x, y) = (x + y,\ x - y)$.

Câu 336. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *biết ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1;1;0),\ (0;1;1),\ (1;0;1)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Biểu thức của f là:*

A. $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z;\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z;\ y\right)$
.
B. $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z;\ \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z;\ y\right)$

.

C. $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z;\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z;\ y\right)$

.

D. $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z;\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z;\ y + \frac{1}{2}z\right)$

.

Câu 337. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, biết ma trận của f đối với cơ sở* $F = \{(1;1;-1),\ (-1;1;1),\ (1;-1;1)\}$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$*. Biểu thức của f là:*

A. $f(x,y,z) = \left(-2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z;\ 4x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z;\ -2x + \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}z\right)$

.

B. $f(x,y,z) = \left(-2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z;\ 4x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z;\ 2x + \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}z\right)$

.

C. $f(x,y,z) = \left(2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z; -4x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z;\ 2x + \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}z\right)$

.

D. $f(x,y,z) = \left(-2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z;\ 4x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z;\ 2x - \frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z\right)$

.

Câu 338. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, trong đó* $f(2,0) = (1,1,1)$*,* $f(1,4) = (1,2,0)$*. Biểu thức của f là:*

A. $f(x,y) = \frac{1}{8}(4x + y, 4x - 3y, 4x + y)$.

B. $f(x,y) = \frac{1}{8}(4x + y, 4x + 3y, 4x - y)$.

C. $f(x,y) = \frac{1}{8}(4x - y, 4x + 3y, 4x - y)$.

D. $f(x,y) = \frac{1}{8}(4x - y, 4x - 3y, 4x - y)$.

Câu 339. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *thỏa* $f(2,0) = (1,1,1)$*,* $f(1,4) = (1,2,0)$*. Cho* $B = \{(2,0);(1,4)\}$ *và* $C = \{(1,2,-2),(-1,2,1),(1,-1,1)\}$*. Tính* $[f]_B^C$*.*

A. $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{11}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{11}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{11}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$.

Câu 340. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *thỏa* $f(2,0) = (1,1,1)$*,* $f(1,4) = (1,2,0)$*. Cho* $B = \{(2,0);(1,4)\}$ *và* $D = \{(1,0,0),(0,-2,0),(1,0,1)\}$*. Tính* $[f]_B^D$*.*

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 341. *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *thỏa* $f(2,0) = (1,1,1)$*,* $f(1,4) =$

$(1,2,0)$. *Cho* $B = \{(2,0);(1,4)\}$ *và* $[d]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Tìm* $[f(d)]_{E_3}$.

A. $(1 \quad 1 \quad -1)^T$. **B**. $(0 \quad 1 \quad -1)^T$.
C. $(0 \quad -1 \quad -1)^T$. **D**. $(1 \quad -1 \quad 0)^T$.

Câu 342. *Trong không gian vector* V, *cho ba cơ sở* $E = \{e_1, e_2\}$, $E^/ = \{e_1^/, e_2^/\}$, $E^{//} = \{e_1^{//}, e_2^{//}\}$, *trong đó* $e_1^/ = e_1 + 2e_2$, $e_2^/ = 2e_1 + 3e_2$, $e_1^{//} = 3e_1 + e_2$, $e_2^{//} = 4e_1 + 2e_2$. *Cho hai ánh xạ tuyến tính* f, g *có* $[f]_{E^/} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ *và* $[g]_{E^{//}} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. *Tìm* $[f+g]_{E^{//}}$.

A. $\begin{pmatrix} 41 & -58 \\ -43 & 62 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} 41 & -58 \\ 43 & -62 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} -41 & 58 \\ 43 & 62 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} -41 & -58 \\ 43 & 62 \end{pmatrix}$.

Câu 343. *Trong không gian vector* V, *cho hai cơ sở* $E = \{e_1, e_2\}$, $E^/ = \{e_1^/, e_2^/\}$, *trong đó* $e_1^/ = e_1 + 2e_2$, $e_2^/ = 2e_1 + 3e_2$. *Cho ánh xạ tuyến tính* f *có* $[f]_{E^/} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. *Tìm* $[f]_E$.

A. $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.
C. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Câu 344. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *cho cơ sở* $B = \{u_1 = (1;1), u_2 = (-1;-2)\}$. *Cho* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *có* $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Cho* $[d]_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Tìm* $\left[f^{-1}(d)\right]_B$.

A. $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$. **C**. $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Câu 345. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *cho cơ sở* $B = \{u_1 = (1;1), u_2 = (-1;-2)\}$. *Cho* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *có* $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Cho* $[d]_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Tìm* $\left[f^{-1}(d)\right]_{E_2}$.

A. $\begin{pmatrix} -9 \\ -13 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$. **C**. $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Câu 346. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *cho cơ sở* $B = \{u_1 = (1;1), u_2 = (-1;-2)\}$. *Cho* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *có* $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Cho* $[d]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Tìm* $\left[f^{-1}(d)\right]_E$.

A. $\begin{pmatrix} -3,5 \\ 2 \end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix} -6,5 \\ 5 \end{pmatrix}$. **C**. $\begin{pmatrix} -5,5 \\ -8 \end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix} -3,5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Câu 347. *Cho* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(2x+y;3x-2y)$. *Cho* $B=\{u_1=(1;1),u_2=(-1;-2)\}$ *và* $[d]_B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. *Tìm* $\left[f^{-1}(d)\right]_{E_2}$.

A. $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. **B**. $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. **C**. $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$. **D**. $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$.

Câu 348. *Cho* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(2x+y;3x-2y)$. *Cho* $B=\{u_1=(1;1),u_2=(-1;-2)\}$ *và* $[d]_{E_2}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. *Tìm* $\left[f^{-1}(d)\right]_B$.

A. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$. **B**. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. **C**. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. **D**. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

Câu 349. *Cho PBĐTT* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *định bởi* $f(x,y,z)=(x;x-y+4z;x-2y+8z)$. *Các vector nào sau đây tạo thành một cơ sở của* $\ker f$*:*

A. $(0;4;1)$. **B**. $(0;-1;4)$.
C. $(1;0;0),(0;-1;4)$. **D**. $(1;0;0),(0;-1;-2)$.

Câu 350. *Cho PBĐTT* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *định bởi* $f(x,y,z)=(x;x-y+4z;x-2y+8z)$. *Các vector nào sau đây tạo thành một cơ sở của* $\operatorname{Im} f$*:*

A. $(1;0;0)$, $(0;-1;4)$. **B**. $(1;0;0)$, $(0;-1;-2)$.
C. $(1;0;0)$, $(0;-1;4)$, $(0;0;1)$. **D**. $(1;0;0)$, $(0;-1;-2)$, $(0;0;1)$.

Câu 351. *PBĐTT* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *định bởi* $f(x,y,z)=(x+y-z,x-3y+z,x-y)$ *có hạng bằng:*

A. *0.* **B**. *1.* **C**. *2.* **D**. *3.*

Câu 352. *PBĐTT* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *định bởi* $f(x,y,z)=(x+y-z,x-3y+z,x-y)$ *có số khuyết bằng:*

A. *0.* **B**. *1.* **C**. *2.* **D**. *3.*

Câu 353. *PBĐTT* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *định bởi* $f(x,y,z)=\left(x+2y+mz;\ mx;\ x+2y+m^2z\right)$ *có hạng bằng* 2 *khi và chỉ khi:*

A. $m\neq 0$. **B**. $m\neq 1$. **C**. $m=0$. **D**. $m=1$.

Câu 354. *PBĐTT* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *định bởi* $f(x,y,z)=\left(x+2y+mz;\ mx;\ x+2y+m^2z\right)$ *có số khuyết bằng* 2 *khi và chỉ khi:*

A. $m\neq 0$. **B**. $m\neq 1$. **C**. $m=0$. **D**. $m=1$.

Câu 355. *PBĐTT* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *định bởi* $f(x,y,z)=\left(x+2y+mz;\ mx;\ x+2y+m^2z\right)$ *có số khuyết bằng* 3 *khi và chỉ khi:*

A. $m\neq 0$. **B**. $m\neq 1$.
C. $\begin{cases}m\neq 0\\ m\neq 1\end{cases}$. **D**. m *tùy ý.*

Câu 356. *PBĐTT* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *định bởi* $f(x,y,z)=\left(x+2y+mz;\ mx;\ x+2y+m^2z\right)$ *có hạng bằng* 3 *khi và chỉ khi:*

A. $m\neq 0$. **B**. $m\neq 1$. **C**. $m=0$. **D**. $m=1$.

Câu 357. *PBĐTT* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *được xác định bởi* $f(x,y,z)=(x-y+z,x-4y+z,mx)$ *là đơn ánh khi:*

A. $m\neq 0$. **B**. $m\neq 4$.

C. $\begin{cases} m\neq 0\\ m\neq 4\end{cases}$. **D**. $\left[\begin{matrix} m\neq 1\\ m\neq 4\end{matrix}\right.$.

Câu 358. *Tìm đa thức đặc trưng của ma trận:* $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\5&3&-2\end{pmatrix}$.

A. $\varphi(\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$. **B**. $\varphi(\lambda)=\left(1-\lambda^2\right)(\lambda+2)$.

C. $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^2(2-\lambda)$. **D**. $\varphi(\lambda)=-(\lambda+1)^2(\lambda+2)$.

Câu 359. *Tìm đa thức đặc trưng của ma trận:* $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

A. $\varphi(\lambda)=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)$. **B**. $\varphi(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda+1)^2$.

C. $\varphi(\lambda)=(2-\lambda)\left(\lambda^2-1\right)$. **D**. $\varphi(\lambda)=-(\lambda+1)^2(\lambda+2)$.

Câu 360. *Tìm đa thức đặc trưng của ma trận:* $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&0\\2&1&0\end{pmatrix}$

A. $\varphi(\lambda)=(2-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-2\right)$.
B. $\varphi(\lambda)=(2-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda+2\right)$.
C. $\varphi(\lambda)=(2-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda-2\right)$.
D. $\varphi(\lambda)=-\lambda\left(\lambda^2-\lambda-2\right)$.

Câu 361. *Tìm đa thức đặc trưng của ma trận:* $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

A. $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$.
B. $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^2\left(\lambda^2-4\right)$.
C. $\varphi(\lambda)=\left(\lambda^2-1\right)(\lambda-2)^2$.
D. $\varphi(\lambda)=\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2-4\right)$.

Câu 362. *Tìm đa thức đặc trưng của ma trận:* $A=\begin{pmatrix}0&1&-2&0\\-1&0&1&0\\0&0&2&0\\-7&0&0&0\end{pmatrix}$

A. $\varphi(\lambda)=\lambda\left(\lambda^2-1\right)(\lambda-2)$.
B. $\varphi(\lambda)=\lambda\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2)$.
C. $\varphi(\lambda)=\lambda\left(\lambda^2+1\right)(\lambda+2)$.
D. $\varphi(\lambda)=\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2)^2$.

Câu 363. *Tìm giá trị riêng* λ*của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

A. $\lambda = \pm 1$. **B**. $\lambda = \pm 3$.
C. $\lambda = 1 \vee \lambda = 3$. **D**. $\lambda = 1 \vee \lambda = -3$.

Câu 364. *Tìm giá trị riêng* λ*của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

A. $\lambda = 0$. **B**. $\lambda = 4$.
C. $\lambda = \pm 2$. **D**. *Các kết quả trên đều sai.*

Câu 365. *Tìm giá trị riêng* λ *của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

A. $\lambda = \pm 1 \vee \lambda = 3$. **B**. $\lambda = 1 \vee \lambda = 3$.
C. $\lambda = -1 \vee \lambda = -3$. **D**. $\lambda = -1 \vee \lambda = 3$.

Câu 366. *Ma trận* $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ *có các trị riêng là :*

A. $\lambda = 1$. **B**. $\lambda = 3$.
C. $\lambda = 1; \lambda = -3$. **D**. $\lambda = 1; \lambda = 3$.

Câu 367. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Ma trận A có các trị riêng là :*

A. $\lambda = 7; \lambda = 3$. **B**. $\lambda = 3$.
C. $\lambda = 7$. **D**. $\lambda = -7; \lambda = 3$.

Câu 368. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 28 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Ma trận A có các trị riêng là :*

A. $\lambda = 17; \lambda = 14$. **B**. $\lambda = 14$.
C. $\lambda = 7$. **D**. $\lambda = -7; \lambda = -14$.

Câu 369. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Ma trận A có các trị riêng là :*

A. $\lambda = 14$. **B**. $\lambda = 7$.
C. $\lambda = 7; \lambda = 14$. **D**. $\lambda = -7; \lambda = -14$.

Câu 370. *Tìm các giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *định bởi* $f(x, y, z) = (2x,\ y + 4z,\ 2y - z)$.

A. $\lambda = \pm 3,\ \lambda = 2$. **B**. $\lambda = \pm 2,\ \lambda = 3$.
C. $\lambda = 2,\ \lambda = 3$. **D**. $\lambda = -2,\ \lambda = -3$.

Câu 371. *Tìm các giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *định bởi* $f(x, y, z, t) = (x + 4y + 3z + 4t,\ -y + 2z + 3t,\ 2z + 3t,\ -2t)$.

A. $\lambda = \pm 2,\ \lambda = 1$. **B**. $\lambda = \pm 1,\ \lambda = 2$.
C. $\lambda = \pm 1,\ \lambda = \pm 2$. **D**. $\lambda = 1,\ \lambda = 2$.

Câu 372. *Tìm các giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *định bởi* $f(x, y, z, t) = (x + 4y + 3z + 4t,\ y + 2z + 3t,\ 4t,\ z)$.

A. $\lambda = 0,\ \lambda = 1$. **B**. $\lambda = \pm 2,\ \lambda = 1$.
C. $\lambda = 1,\ \lambda = 4$. **D**. $\lambda = \pm 1,\ \lambda = \pm 2$.

Câu 373. *Với giá trị nào của m thì vector* $u = (m, 1)$ *là vector riêng của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

A. $m = 0 \vee m = 1$. **B**. $m = 0 \vee m = -1$. **C**. $m = \pm 1$. **D**. *m tùy ý.*

Câu 374. *Với giá trị nào của m thì vector* $u = (m, m)$ *là vector riêng của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

A. $m = 0 \vee m = 1$. **B**. $m = 0 \vee m = -1$.
C. $m = \pm 1$. **D**. *Không có giá trị m nào.*

Câu 375. *Với giá trị nào của m thì vector* $u = (m, m, m)$ *là vector riêng của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

A. $m = 5$. **B**. $m = 0$. **C**. $m \neq 0$. **D**. *m tùy ý.*

Câu 376. *Với giá trị nào của m thì* $u = (m, 1, 0)$ *là vector riêng của phép biến đổi tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *định bởi:* $f(x, y, z) = (x + y + z,\ x + y + z,\ x + y + z)$.

A. $m = 0$. **B**. $m = -1$.
C. *m tùy ý .* **D**. *Không có giá trị nào của m.*

Câu 377. *Với giá trị nào của m thì* $u = (m, 0, m - 1)$ *là vector riêng của phép biến đổi tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *định bởi:* $f(x, y, z) = (x + y,\ y + z,\ z)$.

A. $m = 0$. **B**. $m = 1$.
C. $m = 0,\ m = -1$. **D**. *Không có giá trị nào của m.*

Câu 378. *Tìm các vector giá trị riêng ứng với trị riêng* $\lambda = -1$ *của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A. $u = (\alpha, -\alpha)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
B. $u = (\alpha, -\alpha)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R}$.
C. $u = (0, \alpha)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
D. $u = (\alpha, 0)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Câu 379. *Tìm các vector giá trị riêng ứng với trị riêng* $\lambda = 2$ *của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 27 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

A. $u = (5\alpha, \alpha)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

B. $u = (\alpha, 5\alpha)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R}$.
C. $u = (\alpha, 5\alpha)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
D. $u = (1, 5)$.

Câu 380. *Tìm các vector giá trị riêng ứng với trị riêng* $\lambda = 0$ *của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A. $u = (0, \alpha, \beta)$ *với* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
B. $u = (0, \alpha, \beta)$ *với* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
C. $u = (0, \alpha, \beta)$ *với* $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.
D. $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ *với* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 381. *Tìm các vector giá trị riêng ứng với trị riêng* $\lambda = 2$ *của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A. $u = (0, \alpha, \beta)$ *với* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
B. $u = (\alpha, \alpha, \alpha)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
C. $u = (\alpha, \alpha, 0)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
D. $u = (\alpha, 0, 0)$ *với* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 382. *Véctơ* $x = (2, -2)$ *là véctơ riêng của* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ứng với trị riêng:*

A. $\lambda = 1$. **B**. $\lambda = 0$. **C**. $\lambda = 1; \lambda = -1$. **D**. $\lambda = -1$.

Câu 383. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Ứng với trị riêng* $\lambda = 1$, *ma trận* A *có bao nhiêu véctơ riêng độc lập tuyến tính?*

A. *1*. **B**. *2* . **C**. *3* . **D**. *4*.

Câu 384. *Véctơ* $x = (-2, 2)$ *là véctơ riêng của ma trận* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *ứng với trị riêng:*

A. $\lambda = 5$. **B**. $\lambda = 1$. **C**. $\lambda = -1, \lambda = 5$. **D**. $\lambda = -1$.

Câu 385. *Véctơ* $x = (7, 7)$ *là véctơ riêng của* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *ứng với trị riêng:*

A. $\lambda = 2$. **B**. $\lambda = 1$.
C. $\lambda = 0$. **D**. *Cả ba a), b), c) đều sai.*

Câu 386. *Véctơ* $x = (2, 4)$ *là véctơ riêng của ma trận* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *ứng với trị riêng:*

A. $\lambda = 5$. **B**. $\lambda = 0$. **C**. $\lambda = 0 \vee \lambda = 5$. **D**. $\lambda = 0 \vee \lambda \neq 5$.

Câu 387. *Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có 3 vector riêng là* $(1,2,1)\,;(1,0,1)\,;(1,0,0)$ *lần lượt ứng với các trị riêng là 1,2 và 3. Đặt* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây đúng ?*

A. *A được chéo hóa và* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

B. *A được chéo hóa và* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

C. *A được chéo hóa và* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D. *Các khẳng định trên đều đúng.*

Câu 388. *Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có 3 vector riêng là* $(2,2,1)\,;(1,1,1)\,;(2,0,0)$ *lần lượt ứng với các trị riêng là 3, 2 và 4. Ma trận P nào sau đây thỏa đẳng thức* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

A. $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 389. *Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có đa thức đặc trưng là* $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-4)$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. *A chéo hóa được .*

B. *A chéo hóa được khi và chỉ khi ứng với trị riêng 0, A có hai vector riêng độc lập tuyến tính.*

C. *A chéo hóa được khi và chỉ khi ứng với trị riêng 2, A có hai vector riêng độc lập tuyến tính.*

D. *A chéo hóa được khi và chỉ khi ứng với trị riêng 4, A có hai vector riêng độc lập tuyến tính.*

Câu 390. *Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có đa thức đặc trưng là* $\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)$ *Khẳng định nào sau đây đúng ?*

A. *A không chéo hóa được vì A không có hai trị riêng phân biệt .*

B. *A chéo hóa được.*

C. *A chéo hóa được khi và chỉ khi ứng với trị riêng 2, A có hai vector độc lập tuyến tính .*

D. *Các khẳng định trên đều sai.*

Câu 391. *Cho phép biến đổi tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *có ma trận biểu diễn A, trong đó A có đa thức đặc trưng là* $\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 4)$. *Hơn nữa, các vector riêng của A ứng với trị riêng 2 là* $u = (0, \alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*; các vector riêng của A ứng với trị riêng 4 là* $u = (0, \alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. *f không chéo hóa được vì f chỉ có hai trị riêng phân biệt.*

B. *f không chéo hóa được vì ứng với trị riêng 2, f chỉ có một vector độc lập tuyến tính.*

C. *f không chéo hóa được vì ứng với trị riêng 4, f chỉ có một vector độc lập tuyến tính.*

D. *f chéo hóa được.*

Câu 392. *Cho phép biến đổi tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *có ma trận biểu diễn A, trong đó A có đa thức đặc trưng là* $\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 4)$. *Hơn nữa, các vector riêng của f ứng với trị riêng 2 là* $u = (0, \alpha, \beta)$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$*; các vector riêng của f ứng với trị riêng 4 là* $u = (\alpha, \alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. *f không chéo hóa được vì f chỉ có hai trị riêng phân biệt.*

B. *f không chéo hóa được vì ứng với trị riêng* $2, f$ *chỉ có một vector độc lập tuyến tính.*

C. *f không chéo hóa được vì ứng với trị riêng* $4, f$ *chỉ có một vector độc lập tuyến tính.*

D. *f chéo hóa được.*

Câu 393. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây đúng ?*

A. *A chéo hóa được và ma trận* $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *làm chéo hóa A.*

B. *A chéo hóa được và ma trận* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *làm chéo hóa A.*

C. *A chéo hóa được và ma trận* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *làm chéo hóa A .*

D. *A chéo hóa được và ma trận* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *làm chéo hóa A.*

Câu 394. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Khẳng định nào sau đây đúng ?*

A. *A không chéo hóa được.*

B. *A chéo hóa được và ma trận* $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *làm chéo hóa A .*

C. *A chéo hóa được và ma trận* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *làm chéo hóa A .*

D. *A chéo hóa được và ma trận* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *làm chéo hóa A.*

Câu 395. *Cho ma trận*$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}$ *với* $m \in \mathbb{R}$. *Khẳng định nào sau đây đúng ?*

A. *A chéo hoá được khi và chỉ khi* $m = 0$.
B. *A không chéo hoá được khi và chỉ khi* $m = 0$.
C. *A chéo hóa được với mọi* m.
D. *A chỉ có một trị riêng.*

Câu 396. *Cho ma trận*$A = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{pmatrix}$ *với* $m \in \mathbb{R}$. *Khẳng định nào sau đây đúng ?*

A. *A chéo hoá được khi và chỉ khi* $m = 0$.
B. *A không chéo hoá được khi và chỉ khi* $m = 0$.
C. *A chéo hóa được với mọi* m.
D. *A không có một trị riêng nào.*

Câu 397. *Cho ma trận*$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *với* $a, b \in \mathbb{R}$. *Khẳng định nào sau đây đúng ?*

A. *A chéo hoá được khi và chỉ khi* $a = 0, b = 0$.
B. *A chéo hoá được khi và chỉ khi* $a = 0$.
C. *A chéo hóa được với mọi* a, b.
D. *A không chéo hóa được với mọi* a, b.

Câu 398. *Cho ma trận*$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *với* $a \in \mathbb{R}$. *Khẳng định nào sau đây đúng ?*

A. *A chéo hoá được khi và chỉ khi* $a = 0$.
B. *A chéo hoá được khi và chỉ khi* $a = 1$.
C. *A chéo hóa được với mọi* a.
D. *A không chéo hóa được với mọi* a.

Chương 5

DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1 Khái niệm cơ bản

Định nghĩa 5.1. *Một dạng toàn phương trên* $\mathbb{R}$ *là một ánh xạ* $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *có dạng*

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \ ... + a_{nn}x_n^2. \tag{5.1}$$

Thí dụ 5.1. *Ánh xạ* $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *xác định bởi* $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ *là dạng toàn phương trên* $\mathbb{R}^3$

Định nghĩa 5.2. *Ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận của dạng toàn phương (5.1)

Với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *, dạng toàn phương trên có thể được viết lại dưới dạng ma trận*

$$q(x_1, x_2, ..., x_n) = [x]^T A[x].$$

Thí dụ 5.2. *Xét dạng toàn phương sau trên* $\mathbb{R}^3$

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Ma trận của dạng toàn phương là:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Khi đó $q(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

Giả sử trên $\mathbb{R}^n$ *, ta có một cơ sở khác nữa là* B*. Khi đó,* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *thì* $[x] = P_{E\to B}[x]_B$*. Do đó, ta có:*

$$q(x) = [x]^T A[x] = \left(P_{E\to B}[x]_B\right)^T A\left(P_{E\to B}[x]_B\right) = \left([x]_B\right)^T \left(P_{E\to B}\right)^T A P_{E\to B}[x]_B$$

$$= \left([x]_B\right)^T \left[\left(P_{E\to B}\right)^T A P_{E\to B}\right][x]_B$$

Đặt

$$A_B = \left(P_{E\to B}\right)^T A P_{E\to B}$$

A_B *được gọi là ma trận của dạng toàn phương trong cơ sở* B*.*

Thí dụ 5.3. *Ma trận của dạng toàn phương* $q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2$ *trong cơ sở* $B = \{(1,1), (-1,1)\}$ *?*
Ma trận của dạng toàn phương trong cơ sở B *là*
$A_B = \left(P_{E\to B}\right)^T A P_{E\to B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

Định nghĩa 5.3. *Trong* $\mathbb{R}^n$ *cho dạng toàn phương* q *. Ta nói* q *được đưa về dạng chính tắc nếu ta chỉ ra được một cơ sở* B *mà trong cơ sở này, ma trận của* q *có dạng:*

$$A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó, ta có

$$q(x) = [x]_B^T A_B [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Thí dụ 5.4. *Dạng chính tắc có ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *là* $q(x) = x_1^2 - 2x_2^2$*.*

Thí dụ 5.5. *Trong* $\mathbb{R}^3$ *dạng chính tắc* $q(x) = x_1^2 - 5x_2^2$ *có ma trận là* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa 5.4. *Ma trận P được gọi là ma trận trực giao nếu*

$$P^T = P^{-1}.$$

Thí dụ 5.6. *Ma trận* $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *là trực giao.*

2 Chính tắc hóa dạng toàn phương

2.1 Phương pháp biến đổi trực giao

Giả sử dạng toàn phương $q(x)$ trên $\mathbb{R}^n$ có ma trận là A . Để đưa về dạng chính tắc, ta thực hiện các bước sau:

i) Tìm các trị riêng λ_i của A và vector riêng cơ sở u_i ứng với trị riêng λ_i

ii) Trực chuẩn hóa Gram – Schmidt hệ $\{u_i\}$ thành hệ trực chuẩn $\{w_i\}$

iii) Đặt $P = (\ [w_1]\ \ [w_2]\ \ ...\ \ [w_n]\ )$ thì P là ma trận trực giao.
Đổi biến $[x] = P[y]$ thì $q(x)$ có dạng chính tắc là $q = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$.

Chú thích 33. *Với ma trận trực giao P ở trên, thì*

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Thí dụ 5.7. *Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc*
$q(x_1, x_2) = -3x_2^2 + 4x_1x_2.$

Trong cơ sở chính tắc, $q(x)$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4.$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -4. \end{array}\right.$$

Với $\lambda = 1$, ta xét hệ $(A - I_2)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0.$$

Chọn $x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = 2\alpha$. Ta được nghiệm $x = (2\alpha; \alpha) = \alpha(2; 1)$. Vector riêng cơ sở tương ứng $u_1 = (2; 1)$.
Với $\lambda = -4$, ta xét hệ $(A + 4I_2)[x] = [\theta]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 0$$

Chọn $x_2 = \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = -\frac{\beta}{2}$. *Ta được nghiệm của hệ* $x_1 = \left(-\frac{\beta}{2}; \beta\right) = \frac{\beta}{2}(-1;2)$.
Vector riêng cơ sở tương ứng $u_2 = (-1;2)$. *Trực chuẩn hóa Gram-Smith:*
Đặt $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;1)$; $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1;2)$.
Đặt $P = \left([w_1] \quad [w_2] \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.
Đổi biến $[x] = P[y] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_2,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2$.
Khi đó ta có dạng chính tắc: $q = y_1^2 - 4y_2^2$.

Thí dụ 5.8. *Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp biến đổi trực giao:*

$$q(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2y_3.$$

Trong cơ sở chính tắc, $q(x)$ *có ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{d_1 \to d_1 + d_3} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 7-\lambda \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 \to c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & 4 \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda - 14\right)$$

$$= (7-\lambda)(\lambda - 7)(\lambda + 2) = -(7-\lambda)^2(\lambda+2).$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(7-\lambda)^2(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 7 \\ \lambda = -2. \end{array}\right.$$

Với $\lambda = 7$, *ta xét hệ* $(A - 7I_3)[x] = [\theta]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Chọn $x_2 = \alpha, x_3 = \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \frac{\alpha}{2} - \beta$. *Ta được nghiệm* $x = \left(\frac{\alpha}{2} - \beta, \alpha, \beta\right) = \frac{\alpha}{2}(1;2;0) + \beta(-1;0;1)$.
Các vector cơ sở tương ứng $u_1 = (1;2;0)$, $u_2 = (-1;0;1)$. *Với* $\lambda_2 = -2$, *ta xét hệ* $(A + 2I_3)[x] = [\theta]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \to d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 \to d_3 - 4d_1]{d_1 \to d_2 + 4d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Chọn $x_2 = \gamma \Rightarrow x_3 = -2\gamma,\ x_1 = 2\gamma$. *Ta được nghiệm của hệ:* $x = (2\gamma; \gamma; -2\gamma) = \gamma\,(2; 1; -2)$. *Ta có vector riêng tương ứng* $u_3 = (2; 1; -2)$.
Đặt $v_1 = u_1 = (1; 2; 0) \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{5}$.
$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2|v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}; 1\right) \Rightarrow \|v_2\| = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3|v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3|v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \quad = \left(\frac{10}{9}; \frac{1}{9}; -\frac{2}{9}\right)$$

$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(1; 2; 0)$;
$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}; 1\right) = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}; \frac{2}{3\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$;
$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{9}{\sqrt{105}}\left(\frac{10}{9}; \frac{1}{9}; -\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{\sqrt{105}}\,(10; 1; -2)$.

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & 10/\sqrt{105} \\ 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/\sqrt{105} \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/\sqrt{105} \end{pmatrix}.$$

Đổi biến $[x] = P[y]$ *ta có dạng chính tắc*

$$q = 7y_1^2 + 7y_2^2 - 2y_3^2.$$

Thí dụ 5.9. *Trong* $\mathbb{R}^3$ *, cho ma trận A của DTP* $q(x)$ *có các trị riêng và vector riêng cơ sở tương ứng là:*

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 3,\ u_1 = (1; 1; 1); \\ \lambda_2 = 6,\ u_2 = (-1; -1; 2); \\ \lambda_3 = 8,\ u_3 = (-1; 1; 0). \end{array}$$

Tìm $q(x)$*?*
Đặt $v_1 = u_1 = (1; 1; 1) \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{3}$;
$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2|v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (-1; -1; 2) \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{6}$;
$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3|v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3|v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = (-1; 1; 0) \Rightarrow \|v_3\| = \sqrt{2}$;
Đặt $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1; 1; 1)$;
$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-1; -1; 2)$;
$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1; 1; 0)$.

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Đổi biến $[x] = P[y]$, *ta có dạng chính tắc là :*

$$q = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 8y_3^2.$$

Thí dụ 5.10. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *, cho dạng toàn phương* $q(x_1, x_2) = 3x_2^2 + 4x_1x_2$. *Bằng phép biến đổi trực giao* $[x] = P[y]$. *Xác định dạng chính tắc của* $q(x)$.
Trong cơ sở chính tắc, ma trận của $q(x)$ *là :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$P^T AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vậy dạng chính tắc của $q(x)$ *là :*

$$q = -y_1^2 + 4y_2^2$$

2.2 Thuật toán Lagrange

Xét dạng toàn phương

$$\begin{aligned} q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... + 2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \ ... + a_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

Bằng quy nạp theo n *, chọn một biến mới* y_1 *sao cho*

$$q = a_{11}y_1^2 + q_1(x_2, ..., x_n).$$

Thí dụ 5.11. *Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc* $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.
$q = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.
$= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3\right) + 2x_2^2 + 2x_3^2$
$= \left[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3)\right] + 2x_2^2 + 2x_3^2$
$= \left[(x_1 + x_2 - x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2\right] + 2x_2^2 + 2x_3^2$
$= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$
Đặt $y_1 = x_1 + x_2 - x_3$.
Khi đó $q = y_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.
$\Rightarrow q = y_1^2 + (x_2 + x_3)^2$.
Đặt $y_2 = x_2 + x_3; y_3 = x_3$. *Khi đó* $q = y_1^2 + y_2^2$.
Ta có:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Ma trận đổi biến

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thí dụ 5.12. *Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc* $q = -x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3$.

Ta có:

$$\begin{aligned}q &= -x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3.\\ &= \left(-x_2^2 + 2x_1x_2\right) + 4x_3^2 + 4x_1x_3.\\ &= -\left(x_2^2 - 2x_1x_2\right) + 4x_3^2 + 4x_1x_3\\ &= -\left[(x_1 - x_2)^2 - x_1^2\right] + 4x_3^2 + 4x_1x_3\\ &= -(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3\\ &= -(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 2x_3)^2.\end{aligned}$$

Đặt $y_1 = x_1 - x_2,\ y_2 = x_1 + 2x_3,\ y_3 = x_3$. *Khi đó:*

$$q = -y_1^2 + y_2^2.$$

Ta có :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2\\ y_2 = x_1 + 2x_3\\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_2 - 2y_3\\ x_2 = -y_1 + y_2 - 2y_3\\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Ma trận đổi biến :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chú thích 34. *Trong trường hợp* $a_{ii} = 0, \forall i = \overline{1,n}$ *và tồn tại một hệ số* $a_{ij} \neq 0$ *thì ta thực hiện phép đổi biến:*

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j\\ x_j = y_i - y_j. \end{cases}$$

Thí dụ 5.13. *Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc* $q = x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

Đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2\\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$. *Khi đó:*

$$\begin{aligned}q &= (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)x_3 + 2(y_1 - y_2)x_3\\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1x_3 + 2y_2x_3 + 2y_1x_3 - 2y_2x_3\\ &= y_1^2 - y_2^2 + 4y_1x_3 = (y_1 + 2x_3)^2 - y_2^2 - 4x_3^2.\end{aligned}$$

Đặt :

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 2x_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3\\ z_2 = y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\\ z_3 = x_3 \end{cases}$$

Khi đó: $q = z_1^2 - z_2^2 - 4z_3^2$.

Ta có:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 2x_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3\\ z_2 = y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\\ z_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 2z_1\\ x_1 - x_2 = 2z_2\\ x_3 = z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - 2z_3\\ x_2 = z_1 - z_2 - 2z_3\\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

Ma trận đổi biến:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Luật quán tính- Xác định dấu của dạng toàn phương

3.1 Luật quán tính

Số s các số hạng mang dấu "+" và số p các số hạng mang dấu "-" trong dạng chính tắc là những đại lượng bất biến, không phụ thuộc vào phép biến đổi đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

i) s được gọi là chỉ số dương quán tính của DTP.

ii) p được gọi là chỉ số âm quán tính của DTP.

Thí dụ 5.14. *Trong* $\mathbb{R}^2$ *, cho dạng toàn phương* $q(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2$.
Biến đổi $q = (x_1 - x_2)^2 - 4x_2^2$.
Đổi biến $y_1 = x_1 - x_2,\ y_2 = x_2$. *Ta được* $q = y_1^2 - 4y_2^2$.
Biến đổi $q = -\frac{1}{3}(x_1 + 3x_2)^2 + \frac{4}{3}x_1^2$. *Rồi đổi biến:* $y_1 = x_1 + 3x_2,\ y_2 = x_1$. *Ta được* $q = -\frac{1}{3}y_1^2 + \frac{4}{3}y_2^2$.

3.2 Xác định dấu dạng toàn phương

Định nghĩa 5.5. *Trong* $\mathbb{R}^n$ *cho dạng toàn phương* $q(x)$

i) $q(x)$ *được gọi là xác định dương nếu*

$$q(x) > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{\theta\}.$$

ii) $q(x)$ *được gọi là xác định âm nếu*

$$q(x) < 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{\theta\}.$$

iii) $q(x)$*được gọi là không xác định dấu nếu nó nhận cả giá trị âm lẫn dương.*

Định lý 5.1. *Trong* $\mathbb{R}^n$ *cho dạng toàn phương* $q(x)$

i) Dạng toàn phương $q(x)$ *xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả trị riêng dương.*

ii) Dạng toàn phương $q(x)$ *xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả trị riêng âm.*

Thí dụ 5.15. *Trong* $\mathbb{R}^3$, *xác định dấu của DTP sau:* $q(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3$.
Ma trận của DTP :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ta có :

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 8\lambda + 3\right)$$

$$|A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 > 0 \\ \lambda = 4 + \sqrt{13} > 0 \\ \lambda = 4 - \sqrt{13} > 0. \end{array} \right.$$

Vậy DTP xác định dương.

Thí dụ 5.16. *Trong* $\mathbb{R}^3$, *xác định dấu của dạng toàn phương sau:*
$q(x) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_3$.
Ma trận DTP:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ta có :

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda - 16\right)$$

$$|A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda - 16\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 > 0 \\ \lambda = 8 > 0 \\ \lambda = -2 < 0. \end{array} \right.$$

Vậy DTP không xác định dấu.

Định lý 5.2. *(Định lý Sylvester)Trong* $\mathbb{R}^n$ *cho dạng toàn phương* $q(x)$

i) Dạng toàn phương $q(x)$ *xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các định thức con chính đều dương. Nghĩa là:*

$$D_k > 0, \ \forall k = \overline{1, n}.$$

ii) Dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các định thức con chính cấp chẵn dương, cấp lẻ âm. Nghĩa là:

$$(-1)^k D_k > 0, \ \forall k = \overline{1, n}.$$

Thí dụ 5.17. *Trong* $\mathbb{R}^3$ *, dùng định lý Sylvester, xét tính xác định dấu của DTP sau:* $q(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2$.
Ma trận DTP :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$D_1 = |-2| = -2; D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4; D_3 = -12.$$

Vậy DTP $q(x)$ *xác định âm.*

Thí dụ 5.18. *Trong* $\mathbb{R}^3$ *, dùng định lý Sylvester, xét tính xác định dấu của DTP sau:* $q(x) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_3$.
Ma trận DTP :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$D_1 = |7| = 7; D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14; D_3 = \det A = -32.$$

Vậy DTP $q(x)$ *không xác định dấu.*

4 Rút gọn Conic-Quadratic

4.1 Đường bậc hai(Conic) trong mặt phẳng trong tọa độ Oxy

Định nghĩa 5.6. *Trong mặ phẳng tọa độ Oxy, đường bậc hai là tập hợp tất cả các điểm M(x,y) thỏa mãn phương trình:*

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{5.2}$$

Trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$

Thí dụ 5.19. *Trong* $\mathbb{R}^2$*, đường cong có phương trình* $x^2 + 2y^2 - 3 = 0$ *là đường bậc hai.*

Các dạng chính tắc của đường cônic

i) Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ii) Hypebol: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$

iii) Parabol : $y^2 = px hoặc x^2 = py$

Xét đường bậc hai có phương trình (5.2), *đặt :*

$$Q = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}; \overline{Q} = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Ta có (5.2) *là cônic khi và chỉ khi* $\det \overline{Q} \neq 0$. *Và khi đó:*

i) (5.2) *là Elip khi và chỉ khi* $\det Q > 0$

ii) (5.2) *là Hypebol:* $\det Q < 0$

iii) (5.2) *là Parabol :* $\det Q = 0$

Chú thích 35. *Trường hợp* $\det \overline{Q} = 0$ *thì đường* (5.2) *không phải là cônic.*

Thí dụ 5.20. *Xác định dạng của đường bậc hai:* $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4x - 3y - 7 = 0$
Ta có :

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \overline{Q} \neq 0$$

Vậy đường đã cho là cônic.
Mặt khác $Q = 0$. *Vậy đường bậc hai là Parabol.*

Thí dụ 5.21. *Xác định dạng của đường bậc 2:*$q(x, y) = x^2 - 4x - 4y^2 + 8y$
....
....
....
....

4.2 Mặt bậc hai(Quadratic) trong không gian tọa độ Oxyz

Định nghĩa 5.7. *Trong không gian Oxyz, mặt bậc hai là tập hợp tất cả các điểm M(x,y,z) thỏa mãn phương trình*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0 \qquad (5.3)$$

Trong đó $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 > 0$

Các dạng chính tắc của mặt bậc hai:

i) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$*: Mặt cầu;*

ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$*: Mặt elipsoid;*

iii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$*: Mặt hepebolic một tầng;*

iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$*: Mặt hypebolic hai tầng;*

v) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ *: Mặt nón eliptic;*

vi) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$*: parabolic eliptic*

vii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$*: parabolic hypebolic;*

viii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =$*: Mặt trụ eliptic;*

ix) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$*: Mặt trụ hypebolic;*

x) $y^2 = px$ *hoặc* $x^2 = py$*: Mặt trụ parabolic;*

Phân loại mặt bậc hai:
Xét mặt bậc hai có phương trình (5.3); Đặt:

$$Q = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}; \overline{Q} = \begin{pmatrix} a & d & e & g \\ d & b & f & h \\ e & f & c & k \\ g & h & k & l \end{pmatrix}$$

Ta có (5.3) *không suy biến khi và chỉ khi* $\det \overline{Q} \neq 0$

i) (5.3) *là elipsoid (kể cả elipsoid ảo) khi và chỉ khi Q xác định dương hoặc xác định âm.*

ii) (5.3) *là hypebolic (một tầng hoặc hai tầng) khi và chỉ khi chỉ số* $s - p$ *của Q là* ± 1*.*

iii) (5.3) *là paraboic eliptic (hay parabolic-hypebolic) khi và chỉ khi* $\det Q = 0$*.*

5 Bài tập

5.1. *Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc*

i) $f(x) = 2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 8{x_2}^2$*;*

ii) $f(x) = 3{x_1}^2 + 2{x_2}^2 + {x_3}^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$*;*

iii) $f(x) = 7{x_1}^2 + 10{x_2}^2 + 7{x_3}^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3$*;*

iv) $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$*;*

v) $f(x) = 6{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 + 4x_1x_3$*;*

vi) $f(x) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3$*.*

5.2. *Phân loại cônic sau:*

i) $q = 21x^2 + 20y^2 - 36xy + 18x - 4y - 214 = 0$*.*

ii) $q = 4x^2 + 9y^2 - 12xy + 4x + 18y + 13 = 0$*.*

iii) $q = 3x^2 - 2y^2 - 4xy + 7x - 8y - 24 = 0.$

iv) $q = 6x^2 - 20y^2 - 7xy + 7x - 29y - 5 = 0.$

v) $q = 21x^2 + 29y^2 - 30xy + 60x - 84y - 159 = 0.$

vi) $q = 5x^2 - 9y^2 + 42xy + 108y - 255 = 0.$

vii) $q = -6x^2 + 20y^2 - 7xy + 7x + 6y - 2 = 0.$

viii) $q = 4x^2 + 9y^2 + 12xy - 17x - 6y - 17 = 0.$

ix) $q = 16x^2 + 36y^2 + 24xy + 52x + 30y + 268 = 0.$

x) $q = -5x^2 + 9y^2 - 42xy - 108y - 195 = 0.$

xi) $q = 11x^2 + 45y^2 + 6xy + 48x - 36y + 61 = 0.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 399. *Cho dạng toàn phương* $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$. *Bằng phép biến đổi trực giao, và với cơ sở trực chuẩn* $y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), y_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, *dạng toàn phương này có thể đưa về dạng chính tắc là:*

A. $g(y) = 7y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$.
B. $g(y) = 4y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_3^2$.
C. $g(y) = 4y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_3^2$.
D. *Cả ba **A.**, **B.**, **C.** đều đúng.*

Câu 400. *Cho dạng toàn phương* $f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$. *Bằng phép biến đổi trực giao, và với cơ sở trực chuẩn* $y_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $y_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $y_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, *dạng toàn phương này có thể đưa về dạng chính tắc là:*

A. $g(y) = -6y_1^2 - 3y_2^2 - 6y_3^2$.
B. $g(y) = -6y_1^2 - 6y_2^2 - 3y_3^2$.
C. $g(y) = -3y_1^2 - 3y_2^2 - 6y_3^2$.
D. *Cả ba **A.**, **B.**, **C.** đều đúng.*

Câu 401. *Cho dạng toàn phương* $f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 10x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$. *Bằng phép biến đổi trực giao, và với cơ sở trực chuẩn* $y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $y_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$, $y_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *dạng toàn phương này có thể đưa về dạng chính tắc là:*

A. $g(y) = 12y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2$.
B. $g(y) = 9y_1^2 + 9y_2^2 + 12y_3^2$.
C. $g(y) = 9y_1^2 + 12y_2^2 + 9y_3^2$.
D. *Cả ba **A.**, **B.**, **C.** đều đúng.*

Câu 402. *Cho dạng toàn phương* $f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 + 8x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$. *Bằng phép biến đổi trực giao, và với cơ sở trực chuẩn* $y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $y_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $y_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, *dạng toàn phương này có thể đưa về dạng chính tắc là:*

A. $g(y) = 7y_1^2 + 7y_2^2 + 10y_3^2$.
B. $g(y) = 10y_1^2 + 7y_2^2 + 7y_3^2$.
C. $g(y) = 7y_1^2 + 10y_2^2 + 7y_3^2$.
D. *Cả ba **A.**, **B.**, **C.** đều sai.*

Câu 403. *Cho dạng toàn phương* $f(x_1, x_2, x_3) = -9x_1^2 - 9x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$. *Bằng phép biến đổi trực giao, và với cơ sở trực chuẩn*$y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $y_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $y_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *, dạng toàn phương này có thể đưa về dạng chính tắc là:*

A. $g(y) = -7y_1^2 - 7y_2^2 - 10y_3^2$. **B**. $g(y) = -10y_1^2 - 7y_2^2 - 7y_3^2$.
C. $g(y) = -7y_1^2 - 10y_2^2 - 7y_3^2$. **D**. *Cả ba **A., B., C.** đều sai.*

Câu 404. *Cho dạng toàn phương* $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$. *Bằng phép biến đổi trực giao, và với cơ sở trực chuẩn* $y_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $y_2 = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $y_3 = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ *, dạng toàn phương này có thể đưa về dạng chính tắc là:*

A. $g(y) = -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$. **B**. $g(y) = y_1^2 - 2y_2^2 + 5y_3^2$.
C. $g(y) = -y_1^2 + 2y_2^2 - 5y_3^2$. **D**. *Cả ba **A., B., C.** đều sai.*

Câu 405. *Cho dạng toàn phương* $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2$. *Bằng phép biến đổi trực giao và với cơ sở trực chuẩn* $y_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $y_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $y_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$*, Dạng toàn phương này có thể đưa về dạng chính tắc:*

A. $g(y) = -y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$. **B**. $g(y) = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$.
C. $g(y) = -y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$. **D**. *Cả ba **A., B., C.** đều sai.*

Câu 406. *Cho dạng toàn phương* $q(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$. *Bằng phép biến đổi trực giao và với cơ sở trực chuẩn* $y_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}(1; 5)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}(-5; 1)$, *dạng toàn phương này có thể đưa về dạng chính tắc:*

A. $g(y) = 2y_1^2 + 28y_2^2$. **B**. $g(y) = -2y_1^2 + 28y_2^2$.
C. $g(y) = -2y_1^2 - 28y_2^2$. **D**. *Cả **A., B., C.** đều sai.*

Câu 407. *Cho dạng toàn phương* $q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$ *Bằng phép biến đổi trực giao và với cơ sở trực chuẩn* $y_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3; -1)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1; 3)$, *dạng toàn phương này có thể đưa về dạng chính tắc:*

A. $g(y) = -6y_1^2 + 4y_2^2$. **B**. $g(y) = -6y_1^2 - 4y_2^2$.
C. $g(y) = 6y_1^2 - 4y_2^2$. **D**. *Cả **A., B., C.** đều sai.*

Câu 408. *Phân loại conic sau:* $q = 21x^2 + 20y^2 - 36xy + 18x - 4y - 214 = 0$.

A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Tích 2 đường thẳng.*

Câu 409. *Phân loại conic sau:* $q = 4x^2 + 9y^2 - 12xy + 4x + 18y + 13 = 0$.

A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol .* **D**. *Tích 2 đường thẳng.*

Câu 410. *Phân loại conic sau:* $q = 3x^2 - 2y^2 - 4xy + 7x - 8y - 24 = 0$.

A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Tích 2 đường thẳng.*

Câu 411. *Phân loại conic sau:* $q = 6x^2 - 20y^2 - 7xy + 7x - 29y - 5 = 0$.
A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Tích 2 đường thẳng.*

Câu 412. *Phân loại conic sau:* $q = 21x^2 + 29y^2 - 30xy + 60x - 84y - 159 = 0$.
A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Tích 2 đường thẳng.*

Câu 413. *Phân loại conic sau:* $q = 5x^2 - 9y^2 + 42xy + 108y - 255 = 0$.
A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Tích 2 đường thẳng.*

Câu 414. *Phân loại conic sau:* $q = -6x^2 + 20y^2 - 7xy + 7x + 6y - 2 = 0$.
A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Tích 2 đường thẳng .*

Câu 415. *Phân loại conic sau:* $q = 4x^2 + 9y^2 + 12xy - 17x - 6y - 17 = 0$.
A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Tích 2 đường thẳng.*

Câu 416. *Phân loại conic sau:* $q = 16x^2 + 36y^2 + 24xy + 52x + 30y + 268 = 0$.
A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Cả ba* ***A., B., C.*** *đều sai.*

Câu 417. *Phân loại conic sau:* $q = -5x^2 + 9y^2 - 42xy - 108y - 195 = 0$.
A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Cả ba* ***A., B., C.*** *đều sai.*

Câu 418. *Phân loại conic sau:* $q = 11x^2 + 45y^2 + 6xy + 48x - 36y + 61 = 0$.
A. *elip.* **B**. *hyperbol.*
C. *parabol.* **D**. *Cả ba* ***A., B., C.*** *đều sai.*

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Đình Trí, Toán học cao cấp, tập một, Đại số và Hình học giải tích,Nhà xuất bản Giáo Dục, 2003.

[2] Nguyễn Phú Vinh, Toán Cao cấp A2, ĐH Công Nghiệp Tp. Hồ Chí Minh, 2009.

[3] Nguyễn Phú Vinh, Ngân hàng câu hỏi trắc nghiệm toán cao cấp tập 1, 2, ĐH Công Nghiệp Tp. HCM, 2010.

[4] Linear Algebra (Third Edition), Seymour Lipschutz, Ph.d, Marc Lipson, Ph.d ;McGraw-Hill.

[5] Differential Equation, Dynamic Systems, and Linear Algebra, Morris W.Hirsch and Stephen Smale